

- 5.13** 1) La relation de récurrence $u_{n+2} = -4u_{n+1} - 4u_n$ donne l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= -4\lambda - 4 \\ \lambda^2 + 4\lambda + 4 &= (\lambda + 2)^2 = 0\end{aligned}$$

Puisque l'équation caractéristique admet pour unique solution $\lambda = -2$, la solution générale est de la forme $u_n = a(-2)^n + b n(-2)^n$.

Déterminons les coefficients a et b à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} 0 = u_0 = a(-2)^0 + b \cdot 0 \cdot (-2)^0 = a \\ 1 = u_1 = a(-2)^1 + b \cdot 1 \cdot (-2)^1 = -2a - 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ -2a - 2b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Il en résulte $u_n = 0 \cdot (-2)^n - \frac{1}{2} n (-2)^n = n(-2)^{n-1}$.

- 2) La relation de récurrence $u_{n+2} = 4u_n$ donne l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= 4 \\ \lambda^2 - 4 &= (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0\end{aligned}$$

Vu qu'il y a deux solutions distinctes, la solution s'écrit $u_n = a2^n + b(-2)^n$.

Trouvons les coefficients a et b à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} 0 = u_0 = a2^0 + b(-2)^0 = a + b \\ 4 = u_1 = a2^1 + b(-2)^1 = 2a - 2b \end{cases} \implies \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - 2b = 4 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - 2b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -4b = 4 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -1/4 L_2} \begin{cases} a + b = 0 \\ b = -1 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

On a trouvé $u_n = 2^n - (-2)^n$.

- 3) La relation de récurrence $a_{n+2} + a_n = 0$ donne l'équation l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + 1 = \lambda^2 - i^2 = (\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

Puisqu'il y a deux solutions distinctes, on a $a_n = a i^n + b(-i)^n$.

Utilisons les conditions initiales pour obtenir les coefficients a et b :

$$\begin{cases} 1 = a_0 = a i^0 + b(-i)^0 = a + b \\ 2 = a_1 = a i^1 + b(-i)^1 = i a - i b \end{cases} \implies \begin{cases} a + b = 1 \\ i a - i b = 2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - i L_1} \begin{cases} a + b = 1 \\ i a - i b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -2 i b = 2 - i \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -1/2 i L_2} \begin{cases} a + b = 1 \\ b = \frac{2-i}{-2i} = \frac{(2-i)i}{-2i \cdot i} = \frac{1+2i}{2} = \frac{1}{2} + i \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{cases} a = \frac{1}{2} - i \\ b = \frac{1}{2} + i \end{cases}$$

Il en résulte $a_n = \left(\frac{1}{2} - i\right) i^n + \left(\frac{1}{2} + i\right) (-i)^n$.

Or $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})$ et $-i = \cos(\frac{-\pi}{2}) + i \sin(\frac{-\pi}{2})$ sous forme trigonométrique, ce qui permet l'emploi de la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{1}{2} - i\right) i^n + \left(\frac{1}{2} + i\right) (-i)^n \\
&= \left(\frac{1}{2} - i\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^n + \left(\frac{1}{2} + i\right) \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{2} - i\right) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2} + i\right) \left(\cos\left(\frac{-n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-n\pi}{2}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - i\right) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2} + i\right) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&\quad + i \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

- 4) Commençons par résoudre l'équation homogène $y_{n+2} = y_n$ dont l'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

On en déduit que $y_n^{(h)} = a 1^n + b (-1)^n = a + b (-1)^n$.

Passons à la recherche de la solution particulière. Comme $f(n) = 2^n$ et que 2^n n'est pas une solution de l'équation caractéristique, on sait que $y_n^{(p)} = c 2^n$. La relation de récurrence implique :

$$\begin{aligned}
y_{n+2}^{(p)} &= y_n^{(p)} + 2^n \\
c 2^{n+2} &= c 2^n + 2^n \quad \Bigg| : 2^n \\
c 2^2 &= c + 1 \\
4c &= c + 1 \\
3c &= 1 \\
c &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

On a obtenu $y_n^{(p)} = \frac{1}{3} 2^n$.

La solution générale s'écrit $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = a + b (-1)^n + \frac{1}{3} 2^n$.

Déterminons les coefficients a et b grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} A = y_0 = a + b (-1)^0 + \frac{1}{3} 2^0 = a + b + \frac{1}{3} \\ B = y_1 = a + b (-1)^1 + \frac{1}{3} 2^1 = a - b + \frac{2}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} a + b = A - \frac{1}{3} \\ a - b = B - \frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1}$$

$$\begin{cases} a + b = A - \frac{1}{3} \\ -2b = -A + B - \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{L_1 \rightarrow 2L_1 + L_2} \begin{cases} 2a = A + B - 1 \\ -2b = -A + B - \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1, L_2 \rightarrow -\frac{1}{2}L_2}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B + \frac{1}{6} \end{cases}$$

On conclut que $y_n = \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B + \frac{1}{6}\right) (-1)^n + \frac{1}{3} 2^n =$

$$\begin{cases} A + \frac{2^n - 1}{3} & \text{si } n \text{ est pair} \\ B + \frac{2^n - 2}{3} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- 5) La relation de récurrence $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ donne l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= 2\lambda - 1 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= (\lambda - 1)^2 = 0\end{aligned}$$

Puisqu'il n'y a qu'une seule solution $\lambda = 1$, la solution de l'équation homogène s'écrit $x_n^{(h)} = a1^n + bn1^n = a + bn$.

Passons à la recherche de la solution particulière. Comme $\lambda = 1$ est un zéro double de l'équation caractéristique et que $f(n) = 1$ est un polynôme de degré 0, la solution particulière est de la forme $x_n^{(p)} = n^2 c$. La relation de récurrence implique :

$$\begin{aligned}x_{n+2}^{(p)} &= 2x_{n+1}^{(p)} - x_n^{(p)} + 1 \\ (n+2)^2 c &= 2(n+1)^2 c - n^2 c + 1 \\ cn^2 + 4cn + 4c &= 2cn^2 + 4cn + 2c - cn^2 + 1 \\ 2c - 1 &= 0 \\ c &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On a trouvé $x_n^{(p)} = \frac{1}{2}n^2$.

La solution générale est $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = a + bn + \frac{1}{2}n^2$.

Déterminons les coefficients a et b à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} 0 = x_0 = a + b \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 = a \\ 1 = x_1 = a + b \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 = a + b + \frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On conclut que $x_n = 0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$.

- 6) La relation de récurrence $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ donne lieu à la même équation caractéristique qu'à la question 5). On obtient donc également une seule solution $\lambda = 1$.

La solution générale est de la forme $a_n = a1^n + bn1^n = a + bn$.

La solution particulière est de la forme $a_n^{(p)} = n^2(cn + d)$, vu que $\lambda = 1$ est un zéro double de l'équation caractéristique et que $f(n) = n$ est un polynôme de degré 1. La relation de récurrence entraîne :

$$\begin{aligned}a_{n+2}^{(p)} &= 2a_{n+1}^{(p)} - a_n^{(p)} + n \\ (n+2)^2 (cn + d) &= 2(n+1)^2 (cn + d) - n^2 (cn + d) + n \\ cn^3 + 6cn^2 + 12cn + 8c + dn^2 + 4dn + 4d &= \\ 2cn^3 + 6cn^2 + 6cn + 2c + 2dn^2 + 4dn + 2d - cn^3 - dn^2 + n &= \\ \underbrace{(6c-1)n}_0 + \underbrace{6c+2d}_0 &= 0\end{aligned}$$

Résolvons le système correspondant :

$$\begin{cases} 6c = 1 \\ 6c + 2d = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 6c = 1 \\ 2d = -1 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \rightarrow 1/6 L_1, L_2 \rightarrow 1/2 L_2} \begin{cases} c = \frac{1}{6} \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On a obtenu $a_n^{(p)} = n^2 \left(\frac{1}{6}n - \frac{1}{2} \right)$.

La solution générale s'écrit $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = a + b n + n^2 \left(\frac{1}{6} n - \frac{1}{2} \right)$.

Il reste à déterminer les coefficients a et b avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} 1 = a_0 = a + b \cdot 0 + 0^2 \left(\frac{1}{6} \cdot 0 - \frac{1}{2} \right) = a \\ 0 = a_1 = a + b \cdot 1 + 1^2 \left(\frac{1}{6} \cdot 1 - \frac{1}{2} \right) = a + b - \frac{1}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ a + b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ \implies \end{matrix} \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

On conclut que $a_n = 1 - \frac{2}{3} n + n^2 \left(\frac{1}{6} n - \frac{1}{2} \right) = \frac{n^3 - 3n^2 - 4n + 6}{6}$.