5.14 1) La relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ donne l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$
$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$$
$$\lambda = \tfrac{-(-1)\pm\sqrt{5}}{2\cdot 1} = \tfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Comme il y a deux solutions distinctes, on a que $F_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Déterminons les coefficients a et b à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} 1 = F_1 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{a+b+(a-b)\sqrt{5}}{2} \\ 1 = F_2 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = a\,\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} + b\,\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3(a+b)+(a-b)\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+\sqrt{5})\,a + (1-\sqrt{5})\,b = 2 \\ (3+\sqrt{5})\,a + (3-\sqrt{5})\,b = 2 \end{cases} \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} -2\,a - 2\,b = 0 \\ (3+\sqrt{5})\,a + (3-\sqrt{5})\,b = 2 \end{cases}$$

La première équation donne $b = -a$ que l'on remplace dans la seconde équation :
$(3+\sqrt{5})\,a + (3-\sqrt{5})\,(-a) = 2\sqrt{5}\,a = 2$, si bien que $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

On conclut que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n}$.

On retrouve ainsi la formule de Binet déjà rencontrée à l'exercice 2.7 4).

2) Posons $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On a établi ci-dessus que $F_n = a\,\Phi^n + b\,\varphi^n$ avec $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a\,\Phi^{n+1} + b\,\varphi^{n+1}}{a\,\Phi^n + b\,\varphi^n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a\,\Phi^{n+1} + b\,\varphi^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty} a\,\Phi^n + b\,\varphi^n} \\ &= \frac{a \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi^{n+1} + b \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{n+1}}{a \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi^n + b \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n} = \frac{a \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi^{n+1} + b\cdot 0}{a \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi^n + b \cdot 0} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a\,\Phi^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty} a\,\Phi^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a\,\Phi^{n+1}}{a\,\Phi^n} = \lim_{n\to+\infty} \Phi = \Phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Remarque : comme $|\varphi| < 1$, il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n = 0$.