5.15 1) Les nombres binaires de longueur 2 sans deux 0 consécutifs sont :

01 10 11

Donc $a_2 = 3$.

Les nombres binaires de longueur 3 sans deux 0 consécutifs sont :

010 011 101 110 111

Donc $a_3 = 5$.

2) Considérons un nombre binaire de longueur n sans deux 0 consécutifs.

— Si le premier chiffre est 0, alors le deuxième chiffre doit obligatoirement être 1. Les $n-2$ chiffres restants ont pour seule contrainte de ne pas avoir deux zéros consécutifs : il y a_{n-2} possibilités.

— Si le premier chiffre est 1, alors on peut choisir librement les $n-1$ derniers chiffres à la condition de ne pas avoir deux zéros consécutifs : il y a a_{n-1} possibilités.

$$\boxed{0}\boxed{1}\underbrace{\boxed{}}_{a_{n-2}\text{ possibilités}} \quad \text{ou} \quad \boxed{1}\underbrace{\boxed{}}_{a_{n-1}\text{ possibilités}}$$

En résumé $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ ou, si l'on préfère, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Comme $a_1 = 2$ (0 ou 1) et $a_2 = 3$, on obtient $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$.

3) La relation de récurrence $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ donne l'équation caractéristique

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

qui est identique à celle de l'exercice 5.14 où l'on a obtenu les deux solutions $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

La solution est par conséquent de la forme $a_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Il reste à déterminer les coefficients a et b à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} 2 = a_1 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{a+b+(a-b)\sqrt{5}}{2} \\ 3 = a_2 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = a\,\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} + b\,\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3\,(a+b)+(a-b)\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+\sqrt{5})\,a + (1-\sqrt{5})\,b = 4 \\ (3+\sqrt{5})\,a + (3-\sqrt{5})\,b = 6 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} -2\,a - 2\,b = -2 \\ (3+\sqrt{5})\,a + (3-\sqrt{5})\,b = 6 \end{cases}$$

La première équation devient $a + b = 1$, d'où $b = 1 - a$ que l'on remplace dans la seconde équation :

$(3+\sqrt{5})\,a + (3-\sqrt{5})\,(1-a) = 6$

$3\,a + \sqrt{5}\,a + 3 - 3\,a - \sqrt{5} + \sqrt{5}\,a = 6$

$2\sqrt{5}\,a = 3 + \sqrt{5}$

$a = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$

Par suite $b = 1 - a = 1 - \frac{5+3\sqrt{5}}{10} = \frac{10-(5+3\sqrt{5})}{10} = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$.

On a trouvé $a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

4) (a) $a_1 = 2$

$a_2 = 3$

$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$

$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13$

$a_6 = a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21$

$a_7 = a_6 + a_5 = 21 + 13 = 34$

$a_8 = a_7 + a_6 = 34 + 21 = 55$

$a_9 = a_8 + a_7 = 55 + 34 = 89$

$a_{10} = a_9 + a_8 = 89 + 55 = 144$

(b) On sait que $a_{10} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$.

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 = \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{49+42\sqrt{5}+9\cdot 5}{4} = \frac{94+42\sqrt{5}}{4} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{141+47\sqrt{5}+63\sqrt{5}+21\cdot 5}{4} = \frac{246+110\sqrt{5}}{4} = \frac{123+55\sqrt{5}}{2}$

$\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{123+55\sqrt{5}}{2} = \frac{615+275\sqrt{5}+369\sqrt{5}+165\cdot 5}{20} = \frac{1440+644\sqrt{5}}{20}$

$= \frac{360+161\sqrt{5}}{5}$

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9-6\sqrt{5}+5}{4} = \frac{14-6\sqrt{5}}{4} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8 = \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{49-42\sqrt{5}+9\cdot 5}{4} = \frac{94-42\sqrt{5}}{4} = \frac{47-21\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = \frac{47-21\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{141-47\sqrt{5}-63\sqrt{5}+21\cdot 5}{4} = \frac{246-110\sqrt{5}}{4} = \frac{123-55\sqrt{5}}{2}$

$\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{123-55\sqrt{5}}{2} = \frac{615-275\sqrt{5}-369\sqrt{5}+165\cdot 5}{20} = \frac{1440-644\sqrt{5}}{20}$

$= \frac{360-161\sqrt{5}}{5}$

$a_{10} = \frac{360+161\sqrt{5}}{5} + \frac{360-161\sqrt{5}}{5} = \frac{360\cdot 2}{5} = 144$