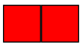
5.16 Désignons par u_n le nombre de façons de recouvrir un rectangle de taille $1 \times n$.

$u_1 = 1$: 

$u_2 = 3$:  ou  ou 

Un rectangle de taille $1 \times n$ peut commencer par :

— un carré rouge de taille 1×1 : il reste alors u_{n-1} façons de recouvrir le rectangle de taille $1 \times (n-1)$ restant.

— un domino bleu de taille 1×2 : il reste alors u_{n-2} façons de recouvrir le rectangle de taille $1 \times (n-2)$ restant.

— un domino jaune de taille 1×2 : il reste alors u_{n-2} façons de recouvrir le rectangle de taille $1 \times (n-2)$ restant.

En résumé $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ u_n = u_{n-1} + 2\,u_{n-2} \end{cases}$.

Résolvons cette relation de récurrence.

Son équation caractéristique est :

$$\lambda^2 = \lambda + 2$$
$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)\,(\lambda - 2) = 0$$

On en déduit $u_n = a\,(-1)^n + b\,2^n$.

Déterminons les coefficients a et b à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} 1 = u_1 = a\,(-1)^1 + b\,2^1 = -a + 2\,b \\ 3 = u_2 = a\,(-1)^2 + b\,2^2 = a + 4\,b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -a + 2\,b = 1 \\ a + 4\,b = 3 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} -a + 2\,b = 1 \\ \phantom{-a + {}} 6\,b = 4 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_1 \to -3\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 3\,a \phantom{{}+6\,b} = 1 \\ \phantom{3\,a + {}} 6\,b = 4 \end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 1/6\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \begin{cases} a \phantom{{}+b} = \frac{1}{3} \\ \phantom{a+{}} b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

On conclut que $u_n = \frac{1}{3}\,(-1)^n + \frac{2}{3}\,2^n = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$.