

5.17

- 1) Comme x_n est le milieu de x_{n-1} et x_{n-2} , on a la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_0 = 10 \\ x_1 = 1 \\ x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \end{cases}.$$

- 2) La relation de récurrence $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ donne l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 = \frac{\lambda+1}{2}$$

$$2\lambda^2 = \lambda + 1$$

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(2\lambda + 1) = 0$$

Il en résulte que $x_n = a1^n + b\left(-\frac{1}{2}\right)^n = a + b\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Trouvons les coefficients a et b à partir des conditions initiales :

Déterminons les coefficients a et b à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} 10 = x_0 = a + b\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = a + b \\ 1 = x_1 = a + b\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = a - \frac{1}{2}b \end{cases} \implies \begin{cases} a + b = 10 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} a + b = 10 \\ 2a - b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ -3b = -18 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -1/3 L_2} \begin{cases} a + b = 10 \\ b = 6 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases}$$

On a obtenu $x_n = 4 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 4 + 6 \cdot 0 = 4$$

- 3) À chaque étape, le point parcourt une distance égale à :

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| &= \left| \left(4 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) - \left(4 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \right| = \left| 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right| \\ &= \left| 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \right| = \left| 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(-\frac{3}{2}\right) \right| = \left| 6 \right| \left| -\frac{1}{2} \right|^{n-1} \left| -\frac{3}{2} \right| \\ &= 9\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

La distance totale parcourue par ce point vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - x_{n-1}| = \sum_{n=1}^{+\infty} 9\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 18$$