5.4 1) L'équation homogène $x_{n+1} = \frac{1}{2}\,x_n$ a pour solution générale $x_n^{(h)} = x_0^{(h)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Comme $r = \frac{1}{2} \neq 1$ et $f(n) = 1$ est un polynôme de degré 0, il en va de même pour la solution particulière : $x_n^{(p)} = a$.

La relation de récurrence $x_{n+1}^{(p)} = \frac{1}{2}\,x_n^{(p)} + 1$ donne :

$a = \frac{1}{2}\,a + 1$

$\frac{1}{2}\,a - 1 = 0$

$a = 2$

La solution générale s'écrit $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = x_0^{(h)}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$.

La condition initiale doit encore être vérifiée :

$3 = x_0 = x_0^{(h)}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 = x_0^{(h)} + 2$ implique $x_0^{(h)} = 1$.

On a trouvé $\boxed{x_n = \frac{1}{2^n} + 2}$.

2) L'équation homogène $y_{n+1} = 3\,y_n$ a pour solution générale $y_n^{(h)} = y_0^{(h)}\,3^n$.

Vu que $r = 3 \neq 1$ et $f(n) = n + 5$ est un polynôme de degré 1, c'est aussi le cas pour la solution particulière : $y_n^{(p)} = a\,n + b$.

La relation de récurrence $y_{n+1}^{(p)} = 3\,y_n^{(p)} + n + 5$ conduit à :

$a\,(n + 1) + b = 3\,(a\,n + b) + n + 5$

$a\,n + a + b = 3\,a\,n + 3\,b + n + 5$

$\underbrace{-2\,a - 1}_{0}\,n + \underbrace{a - 2\,b - 5}_{0} = 0$

Résolvons le système correspondant :

$$\begin{cases} -2\,a - 1 = 0 \\ a - 2\,b - 5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2\,a \phantom{{}-2\,b} = 1 \\ a - 2\,b = 5 \end{cases} \overset{L_2 \to 2\,L_2 + L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} -2\,a \phantom{{}-4\,b} = 1 \\ {} - 4\,b = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{11}{4} \end{cases}$$

La solution particulière est ainsi $y_n^{(p)} = -\frac{1}{2}\,n - \frac{11}{4}$.

La solution générale est donnée par $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = y_0^{(h)}\,3^n - \frac{1}{2}\,n - \frac{11}{4}$.

La condition initiale est satisfaite si :

$2 = y_0 = y_0^{(h)}\,3^0 - \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{11}{4} = y_0^{(h)} - \frac{11}{4}$, d'où suit $y_0^{(h)} = 2 + \frac{11}{4} = \frac{19}{4}$.

On a obtenu $\boxed{y_n = \frac{19}{4}\cdot 3^n - \frac{1}{2}\,n - \frac{11}{4}}$.

3) L'équation homogène $a_n = a_{n-1}$ a pour solution générale $a_n^{(h)} = a_1^{(h)}\cdot 1^{n-1} = a_1^{(h)}$.

Comme $r = 1$ (il y a résonance) et $f(n) = n - 1$ est un polynôme de degré 1, la solution particulière est de la forme $a_n^{(p)} = n\,(a\,n + b)$.

La relation de récurrence $a_n^{(p)} = a_{n-1}^{(p)} + n - 1$ implique :

$n\,(a\,n + b) = (n - 1)\Big(a\,(n - 1) + b\Big) + n - 1$

$a\,n^2 + b\,n = a\,n^2 - 2\,a\,n + a + b\,n - b + n - 1$

$\underbrace{(2\,a - 1)}_{0}\,n \underbrace{-a + b + 1}_{0} = 0$

Résolvons le système correspondant :

$\begin{cases} 2\,a - 1 = 0 \\ -a + b + 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\,a = 1 \\ -a + b = -1 \end{cases} \overset{L_2 \to 2\,L_2 + L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,a = 1 \\ 2\,b = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

La solution particulière est donc $a_n^{(p)} = n\left(\frac{1}{2}\,n - \frac{1}{2}\right)$.

La solution générale s'écrit $a_n = a_n^{(h)} + a_n(p) = a_1^{(h)} + n\left(\frac{1}{2}\,n - \frac{1}{2}\right)$.

La condition initiale doit encore être vérifiée :

$0 = a_1 = a_1^{(h)} + \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} = a_1^{(h)}$.

On conclut que $a_n = 0 + n\left(\frac{1}{2}\,n - \frac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire $\boxed{a_n = \frac{n\,(n-1)}{2}}$.

4) L'équation homogène $a_n = a_{n-1}$ a pour solution générale $a_n^{(h)} = a_0^{(h)} \cdot 1^n = a_0^{(h)}$.

Comme $r = 1$ (il y a résonance) et $f(n) = 2\,n + 3$ est un polynôme de degré 1, la solution particulière est de la forme $a_n^{(p)} = n\,(a\,n + b)$.

La relation de récurrence $a_n^{(p)} = a_{n-1}^{(p)} + 2\,n + 3$ implique :

$n\,(a\,n + b) = (n - 1)\Big(a\,(n - 1) + b\Big) + 2\,n + 3$

$a\,n^2 + b\,n = a\,n^2 - 2\,a\,n + a + b\,n - b + 2\,n + 3$

$\underbrace{(2\,a - 2)}_{0}\,n \underbrace{-a + b - 3}_{0} = 0$

Résolvons le système correspondant :

$\begin{cases} 2\,a - 2 = 0 \\ -a + b - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -a + b = 3 \end{cases} \overset{L_2 \to L_2 + L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$

La solution particulière est par conséquent $a_n^{(p)} = n\,(n + 4)$.

La solution générale s'écrit $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = a_0^{(h)} + n\,(n + 4)$.

Il faut encore vérifier la condition initiale :

$4 = a_0 = a_0^{(h)} + 0 \cdot (0 + 4) = a_0^{(h)}$ si bien que $a_0^{(h)} = 4$.

On a obtenu $a_n = 4 + n\,(n + 4)$, c'est-à-dire $\boxed{a_n = (n + 2)^2}$.

5) L'équation homogène $u_{n+1} = 2\,u_n$ a pour solution générale $u_n^{(h)} = u_0^{(h)}\,2^n$.

Comme $r = 2$ et $f(n) = 3^n$ avec $3 \neq 2$, la solution particulière est de la forme $u_n^{(p)} = a\,3^n$.

La relation de récurrence $u_{n+1}^{(p)} = 2\,u_n^{(p)} + 3^n$ implique :

$a\,3^{n+1} = 2\,a\,3^n + 3^n$

$a\,3^{n+1} = (2\,a + 1)\,3^n \qquad \Big|\ : 3^n$

$3\,a = 2\,a + 1$

$a = 1$

La solution particulière est ainsi $u_n^{(p)} = 3^n$.

La solution générale s'écrit $u_n = u_n^{(h)} + u_n(p) = u_0^{(h)}\,2^n + 3^n$.

La condition initiale doit être vérifiée :

$1 = u_0 = u_0^{(h)}\,2^0 + 3^0 = u_0^{(h)} + 1$, d'où suit que $u_0^{(h)} = 0$.

On conclut que $\boxed{u_n = 3^n}$.

6) L'équation homogène $u_n = 2\,u_{n-1}$ a pour solution générale $u_n^{(h)} = u_0^{(h)}\,2^n$.

Comme $r = 2$ et $f(n) = 5 \cdot 2^n$ avec $r = 2 = t$ (il y a résonance), la solution particulière est de la forme $u_n^{(p)} = a\,n\,2^n$.

La relation de récurrence $u_n^{(p)} = 2\,u_{n-1}^{(p)} + 5 \cdot 2^n$ donne :

$a\,n\,2^n = 2\,a\,(n-1)\,2^{n-1} + 5 \cdot 2^n \quad \Big| \; : 2^{n-1}$

$a\,n\,2 = 2\,a\,(n-1) + 5 \cdot 2$

$2\,a\,n = 2\,a\,n - 2\,a + 10$

$2\,a = 10$

$a = 5$

On a trouvé la solution particulière $u_n^{(p)} = 5\,n \cdot 2^n$.

La solution générale s'écrit $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)} = u_0^{(h)}\,2^n + 5\,n \cdot 2^n$.

Il faut encore vérifier la condition initiale :

$3 = u_0 = u_0^{(h)}\,2^0 + 5 \cdot 0 \cdot 2^0 = u_0^{(h)}$

On conclut que $u_n = 3 \cdot 2^n + 5\,n \cdot 2^n$, c'est-à-dire $\boxed{u_n = (5\,n + 3)\,2^n}$.