5.5 1) (a) $s_n = \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1}_{s_{n-1}} + n = s_{n-1} + n.$

$$\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_n = s_{n-1} + n \ , \ n \geqslant 2 \end{cases}$$

(b) L'équation homogène $s_n = s_{n-1}$ a pour solution générale :
$s_n^{(h)} = s_1^{(h)}\, 1^{n-1} = s_1^{(h)}$.

Comme $r = 1$ (il y a résonance) et $f(n) = n$ est un polynôme de degré 1, la solution particulière est de la forme $s_n^{(p)} = n\,(a\,n + b)$.
La relation de récurrence $s_n^{(p)} = s_{n-1}^{(p)} + n$ donne :

$n\,(a\,n + b) = (n-1)\,\big(a\,(n-1) + b\big) + n$

$a\,n^2 + b\,n = a\,n^2 - 2\,a\,n + a + b\,n - b + n$

$\underbrace{(2\,a - 1)}_{0}\,n \underbrace{- a + b}_{0} = 0$

On en déduit immédiatement $a = \frac{1}{2}$ et $b = a = \frac{1}{2}$.
La solution particulière est donc $s_n^{(p)} = n\left(\frac{1}{2}\,n + \frac{1}{2}\right)$.

La solution générale s'écrit $s_n = s_n^{(h)} + s_n^{(p)} = s_0^{(h)} + n\left(\frac{1}{2}\,n + \frac{1}{2}\right)$.
La condition initiale doit être vérifiée :
$1 = s_1 = s_1^{(h)} + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\right) = s_1^{(h)} + 1 \quad$ d'où $s_1^{(h)} = 0$

On conclut que $s_n = 0 + n\left(\frac{1}{2}\,n + \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire $\boxed{s_n = \frac{n\,(n+1)}{2}}$.

2) (a) $s_n = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}_{s_{n-1}} + n^2 = s_{n-1} + n^2.$

$$\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_n = s_{n-1} + n^2 \ , \ n \geqslant 2 \end{cases}$$

(b) L'équation homogène $s_n = s_{n-1}$ a pour solution générale :
$s_n^{(h)} = s_1^{(h)}\, 1^{n-1} = s_1^{(h)}$.

Comme $r = 1$ (il y a résonance) et $f(n) = n^2$ est un polynôme de degré 2, la solution particulière est de la forme $s_n^{(p)} = n\,(a\,n^2 + b\,n + c)$.
La relation de récurrence $s_n^{(p)} = s_{n-1}^{(p)} + n^2$ donne :

$n\,(a\,n^2 + b\,n + c) = (n-1)\,\big(a\,(n-1)^2 + b\,(n-1) + c\big) + n^2$

$a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n = a\,n^3 - 3\,a\,n^2 + 3\,a\,n - a + b\,n^2 - 2\,b\,n + b + c\,n - c + n^2$

$\underbrace{(3\,a - 1)}_{0}\,n^2 + \underbrace{(-3\,a + 2\,b)}_{0}\,n + \underbrace{a - b + c}_{0} = 0$

Résolvons le système correspondant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\,a \phantom{{}+2\,b+c} & = & 1 \\ -3\,a + 2\,b \phantom{{}+c} & = & 0 \\ a - b + c & = & 0 \end{array}\right. \overset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to 3\,L_3 - L_1}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 3\,a & = & 1 \\ 2\,b & = & 1 \\ -3\,b + 3\,c & = & -1 \end{array}\right. \overset{L_3 \to 2\,L_3 + 3\,L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} 3\,a & & & = 1 \\ & 2\,b & & = 1 \\ & & 6\,c & = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$$

On a obtenu la solution particulière $s_n^{(p)} = n\left(\frac{1}{3}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n + \frac{1}{6}\right)$.

La solution générale s'écrit $s_n = s_n^{(h)} + s_n^{(p)} = s_1^{(h)} + n\left(\frac{1}{3}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n + \frac{1}{6}\right)$.
La condition initiale doit être satisfaite :
$1 = s_1 = s_1^{(h)} + 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{6}\right) = s_1^{(h)} + 1 \quad \text{d'où} \;\; s_1^{(h)} = 0$
On conclut que $s_n = 0 + n\left(\frac{1}{3}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n + \frac{1}{6}\right) = \frac{n\,(2\,n^2+3\,n+1)}{6}$
ou encore $\boxed{s_n = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}}$.