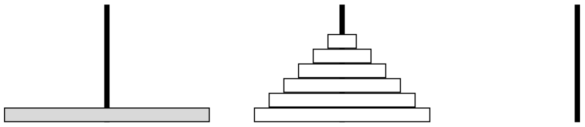
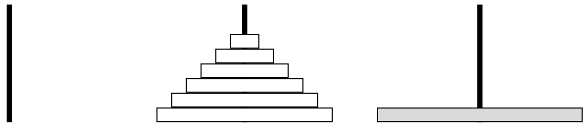
5.6 1) Avec un seul disque, il est clair que $u_1 = 1$.

Considérons $n+1$ disques situés sur le premier piquet et voyons combien de déplacements u_{n+1} sont au minimum nécessaires pour les déplacer sur le troisième piquet.

Le déplacement des n premiers disques sur le deuxième piquet nécessite u_n déplacements.



Il faut ensuite compter le déplacement du disque $n+1$ sur le troisième piquet.



Il faut enfin u_n déplacements pour faire passer les n premiers disques du deuxième au troisième piquet.

Au total, le nombre minimal de déplacements u_{n+1} pour gagner la partie avec $n+1$ disques vérifie $u_{n+1} = u_n + 1 + u_n = 2\,u_n + 1$.

En résumé, on a trouvé $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2\,u_n + 1 \;\;,\;\; n \geqslant 1 \end{cases}$.

2) L'équation homogène $u_{n+1} = 2\,u_n$ a pour solution générale $u_n^{(h)} = u_1^{(h)}\,2^n$.

Comme $r = 2 \neq 1$ et $f(n) = 1$ est un polynôme de degré nul, il en va de même pour la solution particulière : $u_n^{(p)} = a$.

La relation de récurrence implique :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{(p)} &= 2\,u_n^{(p)} + 1 \\ a &= 2\,a + 1 \\ -a - 1 &= 0 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

La solution particulière est donc $u_n^{(p)} = -1$.

La solution générale s'écrit $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)} = u_1^{(h)}\,2^n - 1$.

La condition initiale est vérifiée si

$1 = u_1 = u_1^{(h)}\,2^1 - 1 = 2\,u_1^{(h)} - 1$

$2 = 2\,u_1^{(h)}$
$1 = u_1^{(h)}$
On conclut que $u_n = 2^n - 1$.