5.7

- 1) L'unique chiffre d'un mot de passe valide doit être non nul : $u_1 = 9$.
 Un mot de passe valide à deux chiffres peut être 00 ou être formé de deux chiffres non nuls : $u_2 = 1 + 9 \cdot 9 = 82$.

- 2) Il y a $9 u_{n-1}$ mots de passe valides de longueur n obtenus par l'adjonction d'un chiffre non nul à un mot de passe valide de longueur $n - 1$.

Il existe en tout 10^{n-1} mots de passe à $n - 1$ chiffres, dont u_{n-1} sont valides. C'est pourquoi, il y a $10^{n-1} - u_{n-1}$ mots de passe non valides à $n - 1$ chiffres. C'est aussi le nombre de mots de passe valides à n chiffres obtenus par l'adjonction d'un 0 à un mot de passe non valide de longueur $n - 1$.

En résumé, voici le nombre de mots de passe valide à n chiffres :

$$u_n = 9 u_{n-1} + 10^{n-1} - u_{n-1} = 8 u_{n-1} + 10^{n-1}$$

- 3) Il s'agit de résoudre la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 9 \\ u_n = 8 u_{n-1} + 10^{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$.

L'équation homogène $u_n = 8 u_{n-1}$ a pour solution générale $u_n = u_1^{(h)} 8^n$.

Comme $r = 8 \neq 10 = t$, la solution particulière est de la forme $u_n^{(p)} = a 10^n$.

La relation de récurrence donne :

$$\begin{aligned} u_n^{(p)} &= 8 u_{n-1}^{(p)} + 10^{n-1} \\ a 10^n &= 8 a 10^{n-1} + 10^{n-1} & \Big| : 10^{n-1} \\ 10 a &= 8 a + 1 \\ 2 a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La solution particulière est ainsi $u_n^{(p)} = \frac{1}{2} \cdot 10^n$.

La solution générale s'écrit $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)} = u_1^{(h)} 8^n + \frac{1}{2} \cdot 10^n$.

La condition initiale doit encore être satisfaite :

$$9 = u_1 = u_1^{(h)} 8^1 + \frac{1}{2} \cdot 10^1 = 8 u_1^{(h)} + 5$$

$$4 = 8 u_1^{(h)}$$

$$\frac{1}{2} = u_1^{(h)}$$

En définitive, la solution générale est $u_n = \frac{1}{2} \cdot 8^n + \frac{1}{2} \cdot 10^n = \frac{1}{2} (8^n + 10^n)$.

- 4) (a) $u_2 = 8 \cdot u_1 + 10^1 = 8 \cdot 9 + 10 = 82$
 $u_3 = 8 \cdot u_2 + 10^2 = 8 \cdot 82 + 100 = 756$
 $u_4 = 8 \cdot u_3 + 10^3 = 8 \cdot 756 + 1000 = 7048$
 $u_5 = 8 \cdot u_4 + 10^4 = 8 \cdot 7048 + 10\,000 = 66\,384$
 (b) $u_5 = \frac{1}{2} (8^5 + 10^5) = \frac{1}{2} (32\,768 + 100\,000) = 66\,384$