5.8 1) $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,u_n - 8\,u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix}$

$$= \ \ldots\ldots \ = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

3) Calculons les valeurs propres de la matrice R :

$$0 = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -8 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\,(-\lambda) - 1\cdot(-8) = \lambda^2 - 6\,\lambda + 8 = (\lambda-4)\,(\lambda-2)$$

Déterminons l'espace propre E_4 associé à la valeur propre $\lambda = 4$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6-4 & -8 & 0 \\ 1 & 0-4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -8 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On a obtenu $E_4 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

Recommençons pour l'espace propre E_2 associé à la valeur propre $\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6-2 & -8 & 0 \\ 1 & 0-2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -8 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il en résulte $E_2 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

Par conséquent, la matrice R est bien diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculons l'inverse de la matrice de passage :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 - 4\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \to 2\,L_1 + L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to 1/2\,L_1 \\ L_2 \to -1/2\,L_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{array}\right)$$

Nous pouvons désormais calculer R^n :

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot 4^n & 2\cdot 2^n \\ 4^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4^n - 2^n & -4\cdot 4^n + 4\cdot 2^n \\ \frac{1}{2}\cdot 4^n - \frac{1}{2}\cdot 2^n & -4^n + 2\cdot 2^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 4^{n+1} - \frac{1}{2}\cdot 2^{n+1} & -4^{n+1} + 2\cdot 2^{n+1} \\ \frac{1}{2}\cdot 4^n - \frac{1}{2}\cdot 2^n & -4^n + 2\cdot 2^n \end{pmatrix}$$

4) On conclut que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4^{n+1} - \frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} & -4^{n+1} + 2 \cdot 2^{n+1} \\ \frac{1}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n & -4^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \cdot 4^{n+1} - \frac{5}{2} \cdot 2^{n+1} - 4^{n+1} + 2 \cdot 2^{n+1} \\ \frac{5}{2} \cdot 4^n - \frac{5}{2} \cdot 2^n - 4^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 4^{n+1} - \frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} \\ \frac{3}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

En définitive $u_n = \frac{3}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n$.