

5.9 La relation de récurrence $u_{n+1} = -5u_n - 6u_{n-1}$ donne l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 = -5\lambda - 6$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

Il s'ensuit que $u_n = a(-2)^n + b(-3)^n$.

On détermine les coefficients a et b à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} 1 = u_0 = a(-2)^0 + b(-3)^0 = a + b \\ 4 = u_1 = a(-2)^1 + b(-3)^1 = -2a - 3b \end{cases}$$

Réolvons ce système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -2a - 3b = 4 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1} \begin{cases} a + b = 1 \\ -b = 6 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \rightarrow -L_2]{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{cases} a = 7 \\ b = -6 \end{cases}$$

On conclut que $u_n = 7 \cdot (-2)^n - 6 \cdot (-3)^n$.