5 Séries

Le symbole de sommation $\sum$

5.1 Le nombre $\alpha = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5}$ est une somme de termes qui sont tous de la forme $\dfrac{1}{k\,(k+1)}$.
Pour quelle valeur de k obtient-on le premier terme de α ? le deuxième ? le troisième ? le quatrième ?

Notation : on écrira α sous la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k\,(k+1)}$.

Cette écriture désigne la somme de tous les termes $\dfrac{1}{k\,(k+1)}$ obtenus en remplaçant successivement k par 1, par 2, par 3 et par 4.

5.2 Écrire sans le symbole de sommation $\sum$:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2$ 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+1}\, k^3$ 3) $\displaystyle\sum_{k=4}^{12} 2\,k - 1$

5.3 Écrire les sommes suivantes avec le symbole de sommation $\sum$:

1) $4 \cdot 5^2 + 5 \cdot 6^2 + 6 \cdot 7^2 + 7 \cdot 8^2 + 8 \cdot 9^2$

2) $\dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dfrac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dfrac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dfrac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \dfrac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} + \dfrac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \dfrac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11}$

3) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 11} + \dfrac{1}{11 \cdot 13} + \dfrac{1}{13 \cdot 15}$

Règles de calcul

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k} \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} \lambda\, u_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} u_k}$$

5.4
1) Écrire la somme des n premiers nombres impairs à l'aide du symbole de sommation.
2) En rappelant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$ et en utilisant les règles de calcul ci-dessus, calculer la somme des n premiers nombres impairs.

5.5 1) Écrire à l'aide du symbole de sommation la somme

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + n\,(n+1)$$

2) Calculer cette somme sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$.

Définition d'une série

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

À cette suite, on associe une nouvelle suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formée des sommes suivantes :

$s_1 = u_1$
$s_2 = u_1 + u_2$
$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$
$s_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$
$\ldots$

Le terme général de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc défini par $\displaystyle s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

On appelle **série** de terme général u_k la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On dit que s_n est la **n-ième somme partielle** de cette série.

Si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on dit que la série de terme général u_k **converge**. Dans ce cas, la limite S de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la **somme de la série** et on utilise l'une des écritures suivantes :

$$\mathrm{S} = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

Si une série ne converge pas, elle **diverge**.

5.6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r avec $u_1 \neq 0$.
La série de terme général u_k est-elle convergente ou divergente ? Si elle converge, que vaut sa somme ?

Indication : voir les exercices 4.21 et 4.24.

5.7 Trouver la raison et, s'il y a lieu, la somme des séries géométriques suivantes :

1) $9 + 6 + 4 + \ldots$
2) $16 - 12 + 9 - \ldots$
3) $3 + 2\sqrt{2} + \frac{8}{3} + \ldots$
4) $\frac{1}{120} - \frac{1}{60} + \frac{1}{30} - \ldots$

5.8 Trouver une série géométrique de premier terme 1 et de somme 3.

5.9 Une série géométrique a pour somme 3. Quelles sont les valeurs possibles pour son premier terme ?

5.10 La série $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k$ est-elle convergente ? Dans ce cas, que vaut sa somme ?

5.11 On considère la série $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots$

1) Quel est le terme général de cette série ?
2) Vérifier que $\frac{1}{k\,(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.
3) Calculer la n-ième somme partielle s_n de cette série.
4) En déduire qu'elle converge et calculer sa somme.

5.12 On considère la série $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\dots$

1) Quel est le terme général de cette série ?
2) Vérifier que $\frac{1}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\,k-1}-\frac{1}{2\,k+1}\right)$.
3) Calculer la n-ième somme partielle s_n de cette série.
4) En déduire qu'elle converge et calculer sa somme.

5.13 On considère la série $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$

1) Quel est le terme général de cette série ?
2) Vérifier que pour $k\geqslant 2$, $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.
3) Montrer que la n-ième somme partielle s_n de cette série est majorée par $2-\frac{1}{n}$.
4) Cette série est-elle convergente ou divergente ?

5.14

1) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{k}}>2\,(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$.
2) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>2\,(\sqrt{n+1}-1)$.
3) La série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ est-elle convergente ou divergente ?

5.15 On se demande si en empilant des cubes d'arêtes 1 m, $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{3}$ m, etc., on peut former une pile plus grande que la Tour Eiffel (324 m antenne comprise).

Soit h_n la hauteur de la pile obtenue avec les n premiers cubes, c'est-à-dire $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On appelle cette série la **série harmonique**.

1) (a) Montrer que $h_{n+1} = h_n + \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) En tabulant cette suite sur la calculatrice, peut-on apporter une réponse à la question de départ ?

2) *Quelques exemples*

   (a) Écrire sous forme de sommes h_2, h_4, h_8 puis $h_4 - h_2$, $h_8 - h_4$ (ne pas effectuer les calculs).

   (b) Vérifier que $h_2 - h_1 \geqslant \frac{1}{2}$; $h_4 - h_2 \geqslant \frac{1}{2}$ et $h_8 - h_4 \geqslant \frac{1}{2}$.
   En déduire que $h_8 - h_1 \geqslant \frac{3}{2}$.

3) *De façon générale*

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire de même $h_{2n} - h_n$ comme somme de termes. Combien de termes composent cette somme ? Quel est le plus petit d'entre eux ?

   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}$ puis que $h_{2^n} - h_1 \geqslant n \cdot \frac{1}{2}$.

4) La série harmonique est-elle convergente ou divergente ? Dépassera-t-on les 324 m de la Tour Eiffel ?

5.16 On rappelle que $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $k! > 2^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) En déduire que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ converge et que sa somme est majorée par 2.

Le nombre $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots \approx 2{,}718\,281\,828\,459$ s'appelle le *nombre de Neper* (mathématicien écossais, 1550-1617) et se note par la lettre e (notation proposée par le mathématicien suisse Euler 1707-1783).

Réponses

5.1 $k=1$ $k=2$ $k=3$ $k=4$

5.2 1) $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$ 2) $1^3-2^3+3^3-4^3=-44$

3) $7+9+11+13+15+17+19+21+23=135$

5.3 1) $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} k\,(k+1)^2$ 2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{9} \frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)}$ 3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)}$

5.4 1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\,k-1$ 2) n^2

5.5 1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)$ 2) $\dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$

5.6 La série diverge si $|r| \geqslant 1$; elle converge vers $u_1 \cdot \dfrac{1}{1-r}$ si $|r|<1$.

5.7 1) $r=\frac{2}{3}$ $\mathrm{S}=27$ 2) $r=-\frac{3}{4}$ $\mathrm{S}=\frac{64}{7}$

3) $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\mathrm{S}=27+18\sqrt{2}$ 4) $r=-2$ série divergente

5.8 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (\tfrac{2}{3})^{k-1}=3$

5.9 $u_1 \in \,]0\,;6[$

5.10 La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k$ est divergente.

5.11 1) $u_k=\dfrac{1}{k\,(k+1)}$ 3) $s_n=1-\dfrac{1}{n+1}$ 4) $\mathrm{S}=1$

5.12 1) $\dfrac{1}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)}$ 3) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2\,n+1}\right)$ 4) $\mathrm{S}=\frac{1}{2}$

5.13 1) $\dfrac{1}{k^2}$ 4) Elle converge. Euler a montré en 1748 que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

5.14 3) Elle diverge.

5.15 La série harmonique diverge : on va dépasser la hauteur de la Tour Eiffel.