5.12 1) Le terme général de la série s'écrit $\dfrac{1}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)}$.

2) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\,k-1}-\frac{1}{2\,k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(2\,k+1)-(2\,k-1)}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)}$$
$$=\frac{1}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)}$$

3) $$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\,k-1)\,(2\,k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\,k-1}-\frac{1}{2\,k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,k-1}-\frac{1}{2\,k+1}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}}_{k=1}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}_{k=2}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{7}}_{k=3}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2\,n-1}-\frac{1}{2\,n+1}}_{k=n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\,n+1}\right)$$

4) $$\mathrm{S}=\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\,n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{2\,n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\,n+1}\right)=\frac{1}{2}\,(1-0)=\frac{1}{2}$$