5.13 1) Le terme général de la série est de la forme $\dfrac{1}{k^2}$.

2) $$\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{k-(k-1)}{k\,(k-1)}=\frac{1}{k\,(k-1)}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k-1}>\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k^2}$$

3) $$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\\ &=1+\underbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}}_{k=2}+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{k=3}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{k=4}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}_{k=n}=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}\end{aligned}$$

4) La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

(a) croissante : $s_{n+1}-s_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}>0$

(b) majorée : $s_n<2-\frac{1}{n}<2$

Par conséquent, elle est convergente.