5.15

1) (a) $h_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1}$

(b) $h_{1000} \approx 7$ m

$h_{10\,000} \approx 10$ m

$h_{100\,000} \approx 11$ m

On est encore très loin de 324 m…

2) (a) $h_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

$h_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$h_8 = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

$$h_4 - h_2 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$h_8 - h_4 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

(b) $h_2 - h_1 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$

$h_4 - h_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$h_8 - h_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$$h_8 - h_1 = (h_8 - h_4) + (h_4 - h_2) + (h_2 - h_1) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3) (a) $h_{2\,n} - h_n = \sum_{k=1}^{2\,n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{2\,n} = n \cdot \frac{1}{2\,n} = \frac{1}{2}$

En effet, la somme $\sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{k}$ comporte n termes.

Le plus petit d'entre eux est le dernier : $\frac{1}{2\,n}$.

(b) $h_{2^n} - h_1 = \sum_{k=1}^{n} h_{2^k} - h_{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} h_{2 \cdot 2^{k-1}} - h_{2^{k-1}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

4) La série harmonique est non bornée : c'est pourquoi elle diverge.
On va ainsi dépasser les 324 m de la tour Eiffel.