5.16 1) $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k < \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k-1 \text{ termes}} = 2^{k-1}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{1-1}} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-(\tfrac{1}{2})^n\right)$$
$$= 2 - (\tfrac{1}{2})^{n-1} < 2$$

La suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi croissante et majorée par 2.

En d'autres termes, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to +\infty} s_n$ converge et sa somme est majorée par 2.