5.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

L'exercice 4.21 a prouvé que $s_n = u_1 \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r}$.

1) Si $-1 < r < 1$, l'exercice 4.24 a montré que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u_1 \cdot \dfrac{1}{1-r}$.

2) Si $r = 1$, alors $u_k = u_1 \cdot r^{k-1} = u_1 \cdot 1^{k-1} = u_1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Dès lors $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_1 = n\,u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque l'on suppose $u_1 \neq 0$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée. C'est pourquoi elle diverge, au vu de l'exercice 3.8 3).

3) Si $r = -1$, alors $s_n = u_1 \cdot \dfrac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{1}{2}\,u_1\big(1-(-1)^n\big)$.
Supposons, par l'absurde, que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Alors la suite de terme général $\frac{2}{u_1}\,s_n = 1-(-1)^n$ converge également.
Comme la suite constante $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $c_n = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers -1, la suite de terme général $s_n + c_n = 1-(-1)^n - 1 = -(-1)^n$ est elle aussi convergente.
Il en résulte que la suite de terme général $\frac{1}{-1}\big(-(-1)^n\big) = (-1)^n$ est convergente, ce qui est manifestement faux d'après l'exercice 3.7.
On conclut ainsi que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

4) Si $r < -1$ ou $r > 1$, alors $s_n = u_1 \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r} = \dfrac{u_1}{1-r} \cdot (1-r^n)$ est une suite non bornée. On en déduit qu'elle est divergente, grâce à l'exercice 3.8 3).

En résumé, une série géométrique de raison r
– converge vers $u_1 \cdot \dfrac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$;
– diverge si $|r| \geqslant 1$.