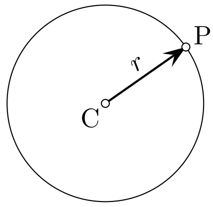
6 La sphère

Équation cartésienne de la sphère

On considère une sphère Σ de centre $\mathrm{C}(x_0\,;y_0\,;z_0)$ de rayon r et un point $\mathrm{P}(x\,;y\,;z)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :



1) $\mathrm{P} \in \Sigma$: le point P appartient à la sphère Σ
2) $\|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\| = r \iff \|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\|^2 = r^2$
3) $\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2}$

Cette dernière expression constitue l'équation cartésienne de la sphère Σ de centre $\mathrm{C}(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de rayon r.

En développant l'équation cartésienne $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, on obtient $x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x_0\,x - 2\,y_0\,y - 2\,z_0\,z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0$.

On constate, dans cette équation du deuxième degré en x, y et z, que

1) les coefficients de x^2, y^2 et de z^2 sont égaux et non nuls ;
2) il n'y a pas de terme en $x\,y$, $x\,z$ et $y\,z$.

Réciproquement, toute équation du deuxième degré en x, y et z telle que

1) les coefficients de x^2, y^2 et de z^2 sont égaux et non nuls,
2) il n'y a pas de terme en $x\,y$, $x\,z$ ou $y\,z$,

c'est-à-dire toute équation de la forme $a\,x^2 + a\,y^2 + a\,z^2 + b\,x + c\,y + d\,z + e = 0$ avec $a \neq 0$, est soit celle d'une sphère, soit celle de la figure vide.

La preuve est similaire à celle établie au chapitre 3.

6.1 Que représentent les équations ci-dessous ? S'il s'agit d'une sphère, on en donnera le centre et le rayon.

1) $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$
2) $x^2 + y^2 + z^2 + 6\,x - 10\,y - 4\,z + 22 = 0$
3) $x^2 + y^2 + z^2 - 12\,x - 2\,y + 6\,z + 56 = 0$
4) $x^2 + y^2 + z^2 + 4\,x - 14\,y - 8\,z + 69 = 0$
5) $36\,x^2 + 36\,y^2 + 36\,z^2 - 108\,x + 96\,y - 144\,z + 109 = 0$

6.2 Déterminer l'équation de la sphère

1) de centre $\mathrm{C}(0\,;2\,;-4)$ et de rayon 5 ;
2) de centre $\mathrm{C}(1\,;-2\,;4)$ et passant par le point $\mathrm{P}(3\,;2\,;-1)$;
3) de diamètre AB avec $\mathrm{A}(-1\,;0\,;5)$ et $\mathrm{B}(7\,;4\,;-7)$;
4) passant par les points $\mathrm{A}(4\,;2\,;-3)$ et $\mathrm{B}(-1\,;3\,;1)$ et ayant son centre sur la droite $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + 2\,\lambda \\ z = 7 + 2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

5) centrée à l'origine et tangente à la droite d'équation $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = 5 - 2\,\lambda \end{cases}$;

6) de centre $C(4\,;1\,;-5)$ et tangente au plan d'équation $x+2\,y+2\,z-4=0$;

7) passant par les points $M(0\,;3\,;-4)$, $P(10\,;1\,;-8)$, $N(2\,;2\,;-3)$ et de rayon $5\sqrt{2}$;

8) passant par les points $R(-2\,;2\,;3)$, $S(0\,;4\,;1)$ et $T(-5\,;5\,;-1)$ et ayant son centre sur le plan d'équation $x+3\,y-2\,z-7=0$;

9) passant par les quatre points $E(5\,;7\,;-2)$, $F(3\,;1\,;0)$, $G(-5\,;12\,;3)$ et $H(-3\,;-2\,;-1)$;

6.3 Déterminer les coordonnées des points d'intersection d'une sphère Σ et d'une droite d :

$$(\Sigma) : x^2+y^2+z^2-2\,x-y+z-3=0 \qquad (d) : \begin{cases} x = -3 + 2\,\lambda \\ y = 6 - 2\,\lambda \\ z = -4 + \lambda \end{cases},\quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

6.4 Le système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100 \\ 2\,x-2\,y-z+9=0 \end{cases}$$

détermine un cercle. Calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.

6.5 Trouver l'équation de la sphère passant par le point $P(2\,;-1\,;1)$ et contenant le cercle déterminé par le système d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2\,x+3\,y-6\,z-5=0 \\ 5\,x+2\,y-z-3=0 \end{cases}.$$

Plan tangent à une sphère

6.6 On considère une sphère Σ de centre $C(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de rayon r et un point $T(x_1\,;y_1\,;z_1)$ situé sur la sphère Σ.

En s'inspirant de la preuve de la page 3.5, démontrer que le plan tangent à la sphère de centre $C(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de rayon r au point $T(x_1\,;y_1\,;z_1)$ a pour équation cartésienne

$$\boxed{(x_1-x_0)\,(x-x_0)+(y_1-y_0)\,(y-y_0)+(z_1-z_0)\,(z-z_0)=r^2}$$

6.7 On donne une sphère Σ et un point T. Après avoir vérifié que T appartient à la sphère Σ, trouver l'équation du plan tangent à la sphère Σ au point T.

1) $(\Sigma) : (x+3)^2+(y-15)^2+(z-2)^2=225$ $\qquad T(7\,;4\,;4)$

2) $(\Sigma) : (x-2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=289$ $\qquad T(14\,;4\,;-6)$

3) $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x - 10\,y + 6\,z - 27 = 0$ $\qquad$ $\mathrm{T}(-2\,;12\,;-5)$

4) $(\Sigma) : 49\,x^2 + 49\,y^2 + 49\,z^2 - 70\,x + 42\,y - 294\,z + 34 = 0$ $\qquad$ $\mathrm{T}(3\,;-1\,;\frac{8}{7})$

6.8 Montrer que les deux sphères sont tangentes intérieurement et déterminer l'équation de leur plan tangent commun :

$(\Sigma_1) : x^2 + y^2 + z^2 = 81$ et $(\Sigma_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 4\,x - 12\,y + 6\,z + 45 = 0$

6.9 On donne une sphère $(\Sigma) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 49$ et un plan $(\alpha) : 3\,x + 2\,y - 6\,z + 57 = 0$.

1) Déterminer la distance minimale des points de la sphère Σ au plan α.
2) Le point $\mathrm{T}(7\,;3\,;c)$ (avec $c > 0$) se trouve sur la sphère Σ. Soit β le plan tangent à la sphère Σ au point T. Calculer l'angle aigu entre les plans α et β.

6.10 On considère une sphère $(\Sigma) : (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 169$ et un plan $(\pi) : 12\,x + 4\,y + 3\,z - 12 = 0$. Déterminer les équations des plans parallèles à π et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.

6.11 On considère une sphère $(\Sigma) : (x+1)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 49$ et une droite $(d) : \begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda \\ y = 2 - 6\,\lambda \\ z = \phantom{2 - {}} 3\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les équations des plans perpendiculaires à d et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.

6.12 On donne la sphère $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et deux points $\mathrm{A}(3\,;0\,;6)$ et $\mathrm{B}(3\,;5\,;1)$. Déterminer les équations des plans tangents à la sphère Σ et contenant la droite AB.

6.13 On donne la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x - 4\,y - 6\,z + 5 = 0$, les points $\mathrm{A}(1\,;2\,;-2)$ et $\mathrm{B}(2\,;1\,;2)$, et la droite d d'équations $\dfrac{x-3}{-4} = y - 2 = \dfrac{z-7}{-1}$.
Déterminer le cube circonscrit à Σ sachant que l'une des faces de ce cube est parallèle au plan OAB et qu'une autre face est parallèle à la droite d (on donnera les équations des faces et les coordonnées des points de contact).

Réponses

6.1

1) La sphère de centre $C(2\,;0\,;-1)$ et de rayon $r=3$
2) La sphère de centre $C(-3\,;5\,;2)$ et de rayon $r=4$
3) La figure vide
4) Le point $C(-2\,;7\,;4)$
5) la sphère de centre $C(\frac{3}{2}\,;-\frac{4}{3}\,;2)$ et de rayon $r=\sqrt{5}$

6.2

1) $x^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$
2) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=45$
3) $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=56$
4) $(x-4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=45$
5) $x^2+y^2+z^2=\frac{175}{3}$
6) $(x-4)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=\frac{64}{9}$
7) $(x-5)^2+(y-6)^2+(z+8)^2=50$ $\qquad (x-\frac{35}{11})^2+(y-\frac{6}{11})^2+(z+\frac{108}{11})^2=50$
8) $(x+3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=9$
9) $(x+3)^2+(y-6)^2+(z+2)^2=65$

6.3 $(1\,;2\,;-2)$ et $(3\,;0\,;-1)$

6.4 $C(-1\,;2\,;3)$ $\qquad r=8$

6.5 $(x+\frac{13}{2})^2+(y+\frac{9}{2})^2+(z-\frac{9}{2})^2=\frac{387}{4}$

6.7

1) $10\,x-11\,y+2\,z-34=0$ $\qquad$ 2) $12\,x+8\,y-9\,z-254=0$
3) $3\,x-7\,y+2\,z+100=0$ $\qquad$ 4) $112\,x-28\,y-91\,z-260=0$

6.8 $2\,x+6\,y-3\,z-63=0$

6.9

1) 1 $\qquad$ 2) 85,32°

6.10

1) $(\tau_1): 12\,x+4\,y+3\,z+129=0$ $\qquad T_1(-9\,;-3\,;-3)$
2) $(\tau_2): 12\,x+4\,y+3\,z-209=0$ $\qquad T_2(15\,;5\,;3)$

6.11

1) $(\pi_1): 2\,x-6\,y+3\,z+87=0$ $\qquad T_1(-3\,;11\,;-5)$
2) $(\pi_2): 2\,x-6\,y+3\,z-11=0$ $\qquad T_2(1\,;-1\,;1)$

6.12 $x-2\,y-2\,z+9=0$ et $x-3=0$

6.13

$2\,x-2\,y-z+14=0$	$(-1\,;4\,;4)$
$2\,x-2\,y-z-4=0$	$(3\,;0\,;2)$
$x+2\,y-2\,z+10=0$	$(0\,;0\,;5)$
$x+2\,y-2\,z-8=0$	$(2\,;4\,;1)$
$2\,x+y+2\,z-1=0$	$(-1\,;1\,;1)$
$2\,x+y+2\,z-19=0$	$(3\,;3\,;5)$