6.10 Comme les plans recherchés sont parallèles au plan $12\,x + 4\,y + 3\,z - 12 = 0$, leurs équations sont de la forme $(\tau) : 12\,x + 4\,y + 3\,z + d = 0$.

Pour qu'un plan τ soit tangent à la sphère Σ de centre C et de rayon r, il faut que $\delta(\mathrm{C}\,;\tau) = r$.

Cette dernière condition impose :

$$13 = \delta(\mathrm{C}\,;\tau) = \frac{|\,12 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + d\,|}{\sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{|\,40 + d\,|}{13}$$

d'où l'on déduit $40 + d = \pm 169$.

1) $40 + d = 169$ donne $d = 129$, si bien que le premier plan recherché a pour équation $(\tau_1) : 12\,x + 4\,y + 3\,z + 129 = 0$.
2) $40 + d = -169$ implique $d = -209$, de sorte que le second plan recherché s'écrit $(\tau_2) : 12\,x + 4\,y + 3\,z - 209 = 0$.

Les points de contact des plans tangents avec la sphère s'obtiennent en déterminant les points d'intersection de la sphère avec la normale aux plans tangents passant par le centre de la sphère, c'est-à-dire la droite d'équation

$$(n) : \begin{cases} x = 3 + 12\,\lambda \\ y = 1 + 4\,\lambda \\ z = 3\,\lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En substituant les coordonnées fournies par l'équation de cette normale dans l'équation de la sphère, on trouve :

$$\big((3 + 12\,\lambda) - 3\big)^2 + \big((1 + 4\,\lambda) - 1\big)^2 + (3\,\lambda)^2 = 169$$
$$(12\,\lambda)^2 + (4\,\lambda)^2 + (3\,\lambda)^2 - 169 = 0$$
$$144\,\lambda^2 + 16\,\lambda^2 + 9\,\lambda^2 - 169 = 0$$
$$169\,\lambda^2 - 169 = 0$$
$$\lambda^2 - 1 = 0$$
$$(\lambda + 1)\,(\lambda - 1) = 0$$

On obtient ainsi les points de contact recherchés :

1) $\lambda = -1$ donne les coordonnées $\begin{cases} x = 3 + 12 \cdot (-1) = -9 \\ y = 1 + 4 \cdot (-1) = -3 \\ z = 3 \cdot (-1) = -3 \end{cases}$

   Comme $12 \cdot (-9) + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot (-3) = -129$, on a obtenu le point de contact $\mathrm{T}_1(-9\,;-3\,;-3)$ avec le plan τ_1.

2) $\lambda = 1$ fournit les coordonnées $\begin{cases} x = 3 + 12 \cdot 1 = 15 \\ y = 1 + 4 \cdot 1 = 5 \\ z = 3 \cdot 1 = 3 \end{cases}$

   Étant donné que $12 \cdot 15 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 209$, on a trouvé le point de contact $\mathrm{T}_2(15\,;5\,;3)$ avec le plan τ_2.