6.11 Tout plan perpendiculaire à la droite d admet pour vecteur normal le vecteur directeur de la droite d : son équation est de la forme $2\,x - 6\,y + 3\,z + d = 0$.

Pour qu'un plan π soit tangent à la sphère Σ de centre C et de rayon r, il faut que $\delta(\mathrm{C}\,;\pi) = r$. Il en résulte :

$$7 = \delta(\mathrm{C}\,;\pi) = \frac{|\,2\cdot(-1) - 6\cdot 5 + 3\cdot(-2) + d\,|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{|\,d - 38\,|}{7}$$

d'où suit $d - 38 = \pm 49$.

1) $d - 38 = 49$ implique $d = 87$, si bien que le premier plan recherché admet pour équation $(\pi_1) : 2\,x - 6\,y + 3\,z + 87 = 0$.
2) $d - 38 = -49$ mène à $d = -11$, de sorte que le second plan recherché a pour équation $(\pi_2) : 2\,x - 6\,y + 3\,z - 11 = 0$.

Les points de contact des plans tangents avec la sphère coïncident avec les points d'intersection de la sphère avec la parallèle à la droite d passant par le centre de la sphère ; celle-là admet pour équation paramétrique :

$$(p) : \begin{cases} x = -1 + 2\,\lambda \\ y = 5 - 6\,\lambda \\ z = -2 + 3\,\lambda \end{cases} ,\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant les coordonnées fournies par l'équation de cette parallèle p dans l'équation de la sphère, on obtient :

$$\big((-1 + 2\,\lambda) + 1\big)^2 + \big((5 - 6\,\lambda) - 5\big)^2 + \big((-2 + 3\,\lambda) + 2\big)^2 = 49$$
$$(2\,\lambda)^2 + (-6\,\lambda)^2 + (3\,\lambda)^2 - 49 = 0$$
$$49\,\lambda^2 - 49 = 0$$
$$\lambda^2 - 1 = 0$$
$$(\lambda + 1)\,(\lambda - 1) = 0$$

Les points de contact s'ensuivent aussitôt :

1) $\lambda = -1$ délivre les coordonnées $\begin{cases} x = -1 + 2\cdot(-1) = -3 \\ y = 5 - 6\cdot(-1) = 11 \\ z = -2 + 3\cdot(-1) = -5 \end{cases}$

   Vu que $2\cdot(-3) - 6\cdot 11 + 3\cdot(-5) = -87$, on a trouvé le point de contact $\mathrm{T}_1(-3\,;11\,;-5)$ avec le plan π_1.

2) $\lambda = 1$ fournit les coordonnées $\begin{cases} x = -1 + 2\cdot 1 = 1 \\ y = 5 - 6\cdot 1 = -1 \\ z = -2 + 3\cdot 1 = 1 \end{cases}$

   Attendu que $2\cdot 1 - 6\cdot(-1) + 3\cdot 1 = 11$, on a affaire au point de contact $\mathrm{T}_2(1\,;-1\,;1)$ avec le plan π_2.