6.12 Soit $(\pi) : a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ l'équation du plan recherché.

Puisque A $\in \pi$, on doit avoir $a{\cdot}3{+}b{\cdot}0{+}c{\cdot}6{+}d = 0$, c'est-à-dire $\boxed{3\,a + 6\,c + d = 0}$.

De même B $\in \pi$ implique $a{\cdot}3{+}b{\cdot}5{+}c{\cdot}1{+}d = 0$, à savoir $\boxed{3\,a + 5\,b + c + d = 0}$.

Pour que le plan π soit tangent à la sphère Σ, de centre $\mathrm{C}(0\,;0\,;0)$ et de rayon $r = 3$, il faut que $\delta(\mathrm{C}\,;\pi) = r$. On en déduit :

$3 = \dfrac{|\,a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ c'est-à-dire $\boxed{d = \pm\,3\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Enfin, sans perte de généralité, on peut supposer $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 1}$.

Il y a dès lors deux systèmes possibles à résoudre.

1) $\begin{cases} 3\,a + 6\,c + d = 0 \\ 3\,a + 5\,b + c + d = 0 \\ d = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$

L'équation $d = 3$ permet tout de suite de se ramener au système :

$\begin{cases} 3\,a + 6\,c = -3 \\ 3\,a + 5\,b + c = -3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$

La deuxième équation implique $c = -3\,a - 5\,b - 3$ que l'on remplace dans les deux autres :

$\begin{cases} a + 2\,b + 1 = 0 \\ 10\,a^2 + 26\,b^2 + 30\,a\,b + 18\,a + 30\,b + 8 = 0 \end{cases}$

La première équation donne la formule de substitution $a = -2\,b - 1$:

$10\,(-2\,b - 1)^2 + 26\,b^2 + 30\,(-2\,b - 1)\,b + 18\,(-2\,b - 1) + 30\,b + 8 = 0$

$6\,b^2 + 4\,b = 2\,b\,(3\,b + 2) = 0$

(a) $b_1 = 0$

$a_1 = -2\,b_1 - 1 = -2 \cdot 0 - 1 = -1$

$c_1 = -3\,a_1 - 5\,b_1 - 3 = -3 \cdot (-1) - 5 \cdot 0 - 3 = 0$

On a ainsi obtenu le plan d'équation $-x{+}3 = 0$ ou encore $\boxed{x - 3 = 0}$.

(b) $b_2 = -\frac{2}{3}$

$a_2 = -2\,b_2 - 1 = -2 \cdot (-\frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

$c_2 = -3\,a_2 - 5\,b_2 - 3 = -3 \cdot \frac{1}{3} - 5 \cdot (-\frac{2}{3}) - 3 = -\frac{2}{3}$

Il en résulte le plan d'équation $\frac{1}{3}\,x - \frac{2}{3}\,y - \frac{2}{3}\,z + 3$ ou plus simplement $\boxed{x - 2\,y - 2\,z + 9 = 0}$.

2) $\begin{cases} 3\,a + 6\,c + d = 0 \\ 3\,a + 5\,b + c + d = 0 \\ d = -3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$

L'équation $d = -3$ conduit immédiatement au système :

$$\begin{cases} 3\,a + 6\,c = 3 \\ 3\,a + 5\,b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $c = 3 - 3\,a - 5\,b$ que l'on remplace dans les deux autres :

$$\begin{cases} a + 2\,b - 1 = 0 \\ 10\,a^2 + 26\,b^2 + 30\,a\,b - 18\,a - 30\,b + 8 = 0 \end{cases}$$

La première équation fournit la formule de substitution $a = -2\,b + 1$:

$10\,(-2\,b + 1)^2 + 26\,b^2 + 30\,(-2\,b + 1)\,b - 18\,(-2\,b + 1) - 30\,b + 8 = 0$

$6\,b^2 - 4\,b = 2\,b\,(3\,b - 2) = 0$

(a) $b_1 = 0$

$a_1 = -2\,b_1 + 1 = -2 \cdot 0 + 1 = 1$

$c_1 = 3 - 3\,a_1 - 5\,b_1 = 3 - 3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 0$

On obtient ainsi l'équation $\boxed{x - 3 = 0}$ que l'on avait déjà obtenue auparavant.

(b) $b_2 = \frac{2}{3}$

$a_2 = -2\,b_2 + 1 = -2 \cdot \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$

$c_2 = 3 - 3\,a_2 - 5\,b_2 = 3 - 3 \cdot (-\frac{1}{3}) - 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

On obtient ainsi l'équation $-\frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3}\,y + \frac{2}{3}\,z - 3 = 0$, de sorte que l'on retrouve l'équation précédente $\boxed{x - 2\,y - 2\,z + 9 = 0}$.