6.13 Déterminons le centre et le rayon de la sphère Σ :

$x^2 - 2\,x + y^2 - 4\,y + z^2 - 6\,z + 5 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 5 = 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$

La sphère admet ainsi pour centre $\mathrm{C}(1\,;2\,;3)$ et pour rayon $r = 3$.

Le plan OAB admet pour vecteur normal

$$\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les faces du cube parallèles au plan OAB s'écrivent $(\pi) : 2\,x - 2\,y - z + d = 0$.

Pour que les faces soient tangentes à la sphère Σ, on doit avoir $\delta(\mathrm{C}\,;\pi) = r$:

$$3 = \frac{|\,2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 3 + d\,|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|\,d-5\,|}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad d - 5 = \pm 9$$

1) $d - 5 = 9$ implique $d = 14$, d'où le plan $\boxed{(\pi_1) : 2\,x - 2\,y - z + 14 = 0}$.

2) $d - 5 = -9$ fournit $d = -4$, ce qui donne $\boxed{(\pi_2) : 2\,x - 2\,y - z - 4 = 0}$.

La droite perpendiculaire aux plans π_1 et π_2 et passant par le centre de la sphère admet pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2\,\lambda \\ y = 2 - 2\,\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Recherchons les points où elle coupe la sphère :

$\big((1+2\,\lambda) - 1\big)^2 + \big((2 - 2\,\lambda) - 2\big)^2 + \big((3-\lambda) - 3\big)^2 = 9$

$(2\,\lambda)^2 + (-2\,\lambda)^2 + (-\lambda)^2 - 9 = 0$

$9\,\lambda^2 - 9 = 0$

$(\lambda + 1)\,(\lambda - 1) = 0$

1) $\lambda = -1$ délivre les coordonnées $\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \\ y = 2 - 2 \cdot (-1) = 4 \\ z = 3 - (-1) = 4 \end{cases}$

Comme $2 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 - 4 = -14$, on a obtenu $\boxed{\mathrm{I}_1(-1\,;4\,;4)} \in \pi_1$.

2) $\lambda = 1$ donne les coordonnées $\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \\ y = 2 - 2 \cdot 1 = 0 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases}$

Vu que $2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 2 = 4$, on a trouvé $\boxed{\mathrm{I}_2(3\,;0\,;2)} \in \pi_2$.

Deux autres faces du cubes admettent pour vecteur normal

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Leurs équations sont par conséquent de la forme $(\pi) : x + 2\,y - 2\,z + d = 0$.

À nouveau, pour être tangents à la sphère Σ, il faut que $\delta(\mathrm{C}\,;\pi)=r$:

$$3=\frac{|\,1+2\cdot 2-2\cdot 3+d\,|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|\,d-1\,|}{3}\qquad\Longleftrightarrow\qquad d-1=\pm 9$$

1) $d-1=9$ délivre $d=10$, d'où le plan $\boxed{(\pi_3): x+2\,y-2\,z+10=0}$.

2) $d-1=-9$ implique $d=-8$, d'où le plan $\boxed{(\pi_4): x+2\,y-2\,z-8=0}$.

La droite perpendiculaire aux plans π_3 et π_4 et passant par le centre de la sphère admet pour équation paramétrique $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+2\,\lambda \\ z=3-2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Recherchons les points où elle coupe la sphère :

$\big((1+\lambda)-1\big)^2+\big((2+2\,\lambda)-2\big)^2+\big((3-2\,\lambda)-3\big)^2=9$

$\lambda^2+(2\,\lambda)^2+(-2\,\lambda)^2-9=0$

$9\,\lambda^2-9=0$

$(\lambda+1)\,(\lambda-1)=0$

1) $\lambda=-1$ fournit les coordonnées $\begin{cases} x=1+(-1)=0 \\ y=2+2\cdot(-1)=0 \\ z=3-2\cdot(-1)=5 \end{cases}$

Puisque $0+2\cdot 0-2\cdot 5=-10$, on a obtenu $\boxed{\mathrm{I}_3(0\,;0\,;5)}\in\pi_3$.

2) $\lambda=1$ donne les coordonnées $\begin{cases} x=1+1=2 \\ y=2+2\cdot 1=4 \\ z=3-2\cdot 1=1 \end{cases}$

Attendu que $2+2\cdot 4-2\cdot 1=8$, on a trouvé $\boxed{\mathrm{I}_4(2\,;4\,;1)}\in\pi_4$.

Les deux dernières faces du cube admettent pour vecteur normal

$\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

Leurs équations sont ainsi de la forme $(\pi): 2\,x+y+2\,z+d=0$.

Pour que ces plans soient tangents à la sphère, on doit aussi avoir $\delta(\mathrm{C}\,;\pi)=r$:

$$3=\frac{|\,2\cdot 1+2+2\cdot 3+d\,|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|\,d+10\,|}{3}\qquad\Longleftrightarrow\qquad d+10=\pm 9$$

1) $d+10=9$ fournit $d=-1$, d'où le plan $\boxed{(\pi_5): 2\,x+y+2\,z-1=0}$.

2) $d+10=-9$ conduit à $d=-19$, d'où le plan $\boxed{(\pi_6): 2\,x+y+2\,z-19=0}$.

La droite perpendiculaire aux plans π_5 et π_6 et passant par le centre de la sphère admet pour équation paramétrique $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3+2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Recherchons les points où elle coupe la sphère :

$\big((1+2\,\lambda)-1\big)^2+\big((2+\lambda)-2\big)^2+\big((3+2\,\lambda)-2\big)^2=9$

$(2\,\lambda)^2+\lambda^2+(2\,\lambda)^2-9=0$

$9\,\lambda^2-9=0$

$(\lambda+1)\,(\lambda-1)=0$

1) $\lambda=-1$ donne les coordonnées $\begin{cases} x=1+2\cdot(-1)=-1 \\ y=2+(-1)=1 \\ z=3+2\cdot(-1)=1 \end{cases}$

Comme $2\cdot(-1)+1+2\cdot 1=1$, on a obtenu $\boxed{\mathrm{I}_5(-1\,;1\,;1)}\in\pi_5$.

2) $\lambda=1$ délivre les coordonnées $\begin{cases} x=1+2\cdot 1=3 \\ y=2+1=3 \\ z=3+2\cdot 1=5 \end{cases}$

Vu que $2\cdot 3+3+2\cdot 5=19$, on a trouvé $\boxed{\mathrm{I}_6(3\,;3\,;5)}\in\pi_6$.