6.2 1) L'équation $x^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$ est triviale.

2) Le rayon vaut $r=\|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\|=\left\|\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

L'équation de la sphère de centre $\mathrm{C}(1\,;-2\,;4)$ et de rayon $r=3\sqrt{5}$ est donc $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=45$.

3) Le centre de la sphère est le milieu des points $\mathrm{A}(-1\,;0\,;5)$ et $\mathrm{B}(7\,;4\,;-7)$: $\mathrm{C}(\frac{-1+7}{2}\,;\frac{0+4}{2}\,;\frac{5+(-7)}{2})=\mathrm{C}(3\,;2\,;-1)$.

Le rayon vaut la moitié du diamètre :

$r=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}8\\4\\-12\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot 4\left\|\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\right\|=2\sqrt{14}$.

L'équation de la sphère est ainsi :

$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=(2\sqrt{14})^2=56$.

4) Soit $\mathrm{C}(x\,;y\,;z)$ le centre de la sphère.

Le point C est équidistant des points A et B :

(a) $\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|=\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|$

$\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2=\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|^2$

$\left\|\begin{pmatrix}x-4\\y-2\\z+3\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|\begin{pmatrix}x+1\\y-3\\z-1\end{pmatrix}\right\|^2$

$(x-4)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2$

$x^2+y^2+z^2-8\,x-4\,y+6\,z+29=x^2+y^2+z^2+2\,x-6\,y-2\,z+11$

$-10\,x+2\,y+8\,z+18=0$

$\boxed{-5\,x+y+4\,z+9=0}$

Cette dernière équation constitue l'équation cartésienne du plan médiateur des points A et B : c'est donc le lieu géométrique des points équidistants des points A et B.

(b) On peut aussi obtenir l'équation du plan médiateur des points A et B en déterminant le plan perpendiculaire à AB et passant par le milieu des points A et B.

Comme $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-5\\1\\4\end{pmatrix}$, l'équation du plan médiateur est de la forme $-5\,x+y+4\,z+d=0$.

Il doit en outre passer par le point $\mathrm{M}(\frac{4+(-1)}{2}\,;\frac{2+3}{2}\,;\frac{-3+1}{2})=(\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\,;-1)$:

$-5\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+4\cdot(-1)+d=0$ implique $d=9$.

L'équation du plan médiateur est donc bien $\boxed{-5\,x+y+4\,z+9=0}$.

On sait par ailleurs que le centre de la sphère doit appartenir à la droite
$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + 2\,\lambda \\ z = 7 + 2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le centre de la sphère est ainsi à l'intersection de cette droite avec le plan médiateur des points A et B :

$-5\,(2-\lambda) + (3+2\,\lambda) + 4\,(7+2\,\lambda) + 9 = 0$

$-10 + 5\,\lambda + 3 + 2\,\lambda + 28 + 8\,\lambda + 9 = 0$

$15\,\lambda + 30 = 0$

$\lambda = -2$

Les coordonnées du centre de la sphère valent par conséquent :
$\begin{cases} x = 2 - (-2) = 4 \\ y = 3 + 2\cdot(-2) = -1 \\ z = 7 + 2\cdot(-2) = 3 \end{cases}$

On a ainsi obtenu $\mathrm{C}(4\,;-1\,;3)$

Le rayon vaut $r = \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = 3 \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{5}$.

On conclut que l'équation de la sphère est :
$(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = (3\sqrt{5})^2 = 45$.

5) Le rayon de la sphère est égale à la distance entre son centre et la droite à laquelle elle est tangente :

$$r = \delta(\mathrm{C}\,;d) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-5 \\ 0-5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\sqrt{350}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{350}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{175}{3}} = \frac{\sqrt{175}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{21}}{3}$$

L'équation de la sphère est par conséquent : $x^2 + y^2 + z^2 = (\frac{5\sqrt{21}}{3})^2 = \frac{175}{3}$.

6) Le rayon de la sphère est donné par la distance de son centre au plan tangent :

$$r = \delta(\mathrm{C}\,;\pi) = \frac{|\,4 + 2\cdot 1 + 2\cdot(-5) - 4\,|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-8\,|}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$$

L'équation de la sphère est ainsi $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = (\frac{8}{3})^2 = \frac{64}{9}$.

7) Le centre de la sphère se situe sur le plan médiateur des points M et P.

Comme $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, son équation cartésienne est de la forme $5\,x - y - 2\,z + d = 0$.

Le plan médiateur passe par le milieu de $\mathrm{M}(0\,;3\,;-4)$ et $\mathrm{P}(10\,;1\,;-8)$, à savoir $\mathrm{M}_{\mathrm{MP}}(5\,;2\,;-6)$; on a donc $5 \cdot 5 - 2 - 2 \cdot (-6) + d = 0$, si bien que $d = -35$.

Le plan médiateur des points M et P est ainsi $\boxed{5\,x - y - 2\,z - 35 = 0}$.

Le centre de la sphère appartient au plan médiateur des points M et N.

Vu que $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, son équation est de la forme $2\,x - y + z + d = 0$.

Il passe en outre par le milieu des points $\mathrm{M}(0\,;3\,;-4)$ et $\mathrm{N}(2\,;2\,;-3)$, c'est-à-dire $\mathrm{M}_{\mathrm{MN}}(1\,;\frac{5}{2}\,;-\frac{7}{2})$; on a ainsi $2 \cdot 1 - \frac{5}{2} + (-\frac{7}{2}) + d = 0$, de sorte que $d = 4$.

Le plan médiateur des points M et N est donc $\boxed{2\,x - y + z + 4 = 0}$.

Le centre de la sphère $\mathrm{C}(x\,;y\,;z)$ est à une distance de $5\sqrt{2}$ du point M.
On en déduit $5\sqrt{2} = \|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\|$, puis $50 = \|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\|^2 = x^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2$.

En résumé, les coordonnées du centre de la sphère satisfont ce système :

$$\left\{\begin{array}{l|l|l} 5\,x - y - 2\,z - 35 = 0 & \cdot 1 & \cdot 1 \\ 2\,x - y + z + 4 = 0 & \cdot 2 & \cdot(-1) \\ x^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 50 & & \end{array}\right.$$

$9\,x - 3\,y - 27 = 0$ implique $y = 3\,x - 9$.

$3\,x - 3\,z - 39 = 0$ fournit $z = x - 13$.

Grâce à ces substitutions, la troisième équation devient :

$x^2 + (3\,x - 9 - 3)^2 + (x - 13 + 4)^2 = 50$

$x^2 + (3\,x - 12)^2 + (x - 9)^2 - 50 = 0$

$x^2 + 9\,x^2 - 72\,x + 144 + x^2 - 18\,x + 81 - 50 = 0$

$11\,x^2 - 90\,x + 175 = 0$

$\Delta = (-90)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 175 = 400 = 20^2$

(a) $x_1 = \frac{-(-90)+20}{2 \cdot 11} = 5$

$y_1 = 3\,x_1 - 9 = 3 \cdot 5 - 9 = 6$

$z_1 = x_1 - 13 = 5 - 13 = -8$

Le premier centre possible est donc $\mathrm{C}_1(5\,;6\,;-8)$ et l'équation de la première sphère est : $(x-5)^2 + (y-6)^2 + (z+8)^2 = 50$.

(b) $x_2 = \frac{-(-90)-20}{2 \cdot 11} = \frac{35}{11}$

$y_2 = 3\,x_2 - 9 = 3 \cdot \frac{35}{11} - 9 = \frac{6}{11}$

$z_2 = x_2 - 13 = \frac{35}{11} - 13 = -\frac{108}{11}$

Le second centre possible est ainsi $C_2(\frac{35}{11}\,;\frac{6}{11}\,;-\frac{108}{11})$ et l'équation de la seconde sphère est : $(x-\frac{35}{11})^2+(y-\frac{6}{11})^2+(z+\frac{108}{11})^2=50$.

8) Le centre de la sphère fait partie du plan médiateur des points R et S.

Comme $\overrightarrow{RS}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, son équation cartésienne est de la forme $x+y-z+d=0$.

Il passe en outre par le milieu des points R et S, à savoir $M_{RS}(-1\,;3\,;2)$: $-1+3-2+d=0$ fournit $d=0$.

Le plan médiateur des points R et S est donc $\boxed{x+y-z=0}$.

Le centre de la sphère se situe sur le plan médiateur des points R et T.

Puisque $\overrightarrow{RT}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-4\end{pmatrix}$, son équation est de la forme $-3\,x+3\,y-4\,z+d=0$.

On sait de plus qu'il passe par le milieu des points R et T, plus précisément $M_{RT}(-\frac{7}{2}\,;\frac{7}{2}\,;1)$; on a par conséquent $-3\cdot(-\frac{7}{2})+3\cdot\frac{7}{2}-4\cdot 1+d=0$, d'où découle $d=-17$.

Le plan médiateur des points R et T est ainsi $\boxed{-3\,x+3\,y-4\,z-17=0}$.

Comme le centre appartient encore au plan $x+3\,y-2\,z-7=0$, ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x&+&y&-&z&=&0\\ -3\,x&+&3\,y&-&4\,z&=&17\\ x&+&3\,y&-&2\,z&=&7\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\cdot 3\\ \cdot 1\\ \\ \end{array}\right. \left|\begin{array}{l}\cdot 1\\ \\ \cdot(-1)\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x&+&y&-&z&=&0\\ &&6\,y&-&7\,z&=&17\\ &&-2\,y&+&z&=&-7\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \\ \cdot 1\\ \cdot 3\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x&+&y&-&z&=&0\\ &&6\,y&-&7\,z&=&17\\ &&&-&4\,z&=&-4\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\cdot 1\\ \\ :(-4)\end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \cdot 1\\ \cdot(-\frac{7}{4})\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x&+&y&=&1\\ &&6\,y&=&24\\ &&z&=&1\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\cdot 1\\ :(-6)\\ \\ \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ :6\\ \\ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x&=&-3\\ y&=&4\\ z&=&1\end{array}\right.$$

En résumé, la sphère admet pour centre $C(-3\,;4\,;1)$.

Son rayon vaut $r=\|\overrightarrow{CR}\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{9}=3$.

En définitive, la sphère a pour équation $(x+3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=9$.

9) (a) **1^re^ méthode**

Le centre de la sphère se situe sur le plan médiateur des points E et F.

Vu que $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, son équation cartésienne est de la forme $x + 3\,y - z + d = 0$.

Il passe par ailleurs par le milieu des points E et F, à savoir $\mathrm{M_{EF}}(4\,;4\,;-1)$, si bien que $4 + 3 \cdot 4 - (-1) + d = 0$ délivre $d = -17$.

Le plan médiateur des points E et F est donc $\boxed{x + 3\,y - z - 17 = 0}$.

Le centre de la sphère appartient au plan médiateur des points E et G.

Étant donné que $\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, son équation cartésienne est de la forme $-2\,x + y + z + d = 0$.

En outre, il doit passer par le milieu des points E et G, qui est $\mathrm{M_{EG}}(0\,;\frac{19}{2}\,;\frac{1}{2})$; cela impose $-2 \cdot 0 + \frac{19}{2} + \frac{1}{2} + d = 0$, d'où suit $d = -10$.

Le plan médiateur des points E et G est ainsi $\boxed{-2\,x + y + z - 10 = 0}$.

Le centre de la sphère fait partie du plan médiateur des points E et H.

Attendu que $\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$, son équation cartésienne est de la forme $-8\,x - 9\,y + z + d = 0$.

Il passe également par le milieu des points E et H, c'est-à-dire $\mathrm{M_{EH}}(1\,;\frac{5}{2}\,;-\frac{3}{2})$; il en suit $-8 \cdot 1 - 9 \cdot \frac{5}{2} + (-\frac{3}{2}) + d = 0$, de sorte que $d = 32$.

Le plan médiateur des points E et H est donc $\boxed{-8\,x - 9\,y + z + 32 = 0}$.

En résumé, le centre de la sphère est solution du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & - & z & = & 17 \\ -2\,x & + & y & + & z & = & 10 \\ -8\,x & - & 9\,y & + & z & = & -32 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l|l} \cdot 2 & \cdot 8 \\ \cdot 1 & \\ & \cdot 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & - & z & = & 17 \\ & & 7\,y & - & z & = & 44 \\ & & 15\,y & - & 7\,z & = & 104 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \\ \cdot 15 \\ \cdot(-7) \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & - & z & = & 17 \\ & & 7\,y & - & z & = & 44 \\ & & & & 34\,z & = & -68 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l|l} \cdot 1 & \\ & \cdot 1 \\ :34 & :34 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 3\,y & = & 15 \\ & & 7\,y & = & 42 \\ & & z & = & -2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l|l} \cdot 1 & \\ \cdot(-\frac{3}{7}) & :7 \\ & \end{array}$$

$$\begin{cases} x & & & = -3 \\ & y & & = 6 \\ & & z & = -2 \end{cases}$$

La sphère est ainsi centrée en $C(-3\,;6\,;-2)$.

Son rayon vaut $r = \|\overrightarrow{CE}\| = \left\|\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{65}\,.$

L'équation de la sphère est $(x+3)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 65\,.$

(b) **2^e^ méthode**

L'équation de la sphère s'écrit $(\Sigma) : x^2+y^2+z^2+a\,x+b\,y+c\,z+d = 0\,.$

$E(5\,;7\,;-2) \in \Sigma$ donne
$5^2 + 7^2 + (-2)^2 + a\cdot 5 + b \cdot 7 + c \cdot (-2) + d = 0$
c'est-à-dire $\boxed{5\,a + 7\,b - 2\,c + d = -78}$.

$F(3\,;1\,;0) \in \Sigma$ implique
$3^2 + 1^2 + 0^2 + a \cdot 3 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d = 0$
c'est-à-dire $\boxed{3\,a + b + d = -10}$.

$G(-5\,;12\,;3) \in \Sigma$ conduit à
$(-5)^2 + 12^2 + 3^2 + a \cdot (-5) + b \cdot 12 + c \cdot 3 + d = 0$
c'est-à-dire $\boxed{-5\,a + 12\,b + 3\,c + d = -178}$.

$H(-3\,;-2\,;-1) \in \Sigma$ délivre
$(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + a \cdot (-3) + b \cdot (-2) + c \cdot (-1) + d = 0$
c'est-à-dire $\boxed{-3\,a - 2\,b - c + d = -14}$.

Résolvons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr|l|l|l} 5\,a & + & 7\,b & - & 2\,c & + & d & = & -78 & \cdot 1 & & \\ 3\,a & + & b & & & + & d & = & -10 & & \cdot 1 & \cdot 5 \\ -5\,a & + & 12\,b & + & 3\,c & + & d & = & -178 & \cdot 1 & & \cdot 3 \\ -3\,a & - & 2\,b & - & c & + & d & = & -14 & & \cdot 1 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr|l|l} 5\,a & + & 7\,b & - & 2\,c & + & d & = & -78 & & \\ & & 19\,b & + & c & + & 2\,d & = & -256 & \cdot 1 & \\ & - & b & - & c & + & 2\,d & = & -24 & \cdot 19 & \cdot 41 \\ & & 41\,b & + & 9\,c & + & 8\,d & = & -584 & & \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr|l} 5\,a & + & 7\,b & - & 2\,c & + & d & = & -78 & \\ & & 19\,b & + & c & + & 2\,d & = & -256 & \\ & & & - & 18\,c & + & 40\,d & = & -712 & \cdot(-16) \\ & & & - & 32\,c & + & 90\,d & = & -1568 & \cdot 9 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr|l} 5\,a & + & 7\,b & - & 2\,c & + & d & = & -78 & \\ & & 19\,b & + & c & + & 2\,d & = & -256 & \\ & & & - & 18\,c & + & 40\,d & = & -712 & \\ & & & & & & 170\,d & = & -2720 & :170 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 5\,a + & 7\,b - & 2\,c + & d = & -78 \\ & 19\,b + & c + & 2\,d = & -256 \\ & & -\ 18\,c + & 40\,d = & -712 \\ & & & d = & -16 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \\ \\ \cdot 1 \\ \cdot(-40) \end{array} \quad \begin{array}{|l} \\ \cdot 1 \\ \\ \cdot(-2) \end{array} \quad \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 5\,a + & 7\,b - & 2\,c & = & -62 \\ & 19\,b + & c & = & -224 \\ & & -\ 18\,c & = & -72 \\ & & & d = & -16 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \\ \cdot 1 \\ :18 \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \\ :(-9) \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{|l} \\ \\ :(-18) \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 5\,a + & 7\,b & & = & -54 \\ & 19\,b & & = & -228 \\ & & c & = & 4 \\ & & & d = & -16 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \cdot 19 \\ \cdot(-7) \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{|l} \\ :19 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 95\,a & & & = & 570 \\ & b & & = & -12 \\ & & c & = & 4 \\ & & & d = & -16 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} :95 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} a & & & = & 6 \\ & b & & = & -12 \\ & & c & = & 4 \\ & & & d = & -16 \end{array}\right.$$

On a ainsi obtenu l'équation de la sphère :

$x^2 + y^2 + z^2 + 6\,x - 12\,y + 4\,z - 16 = 0$

$(x + 3)^2 - 9 + (y - 6)^2 - 36 + (z + 2)^2 - 4 - 16 = 0$

$(x + 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 2)^2 = 65$