6.5 Le cercle est caractérisé par l'intersection d'une sphère Σ et d'un plan π.

Déterminons le centre et le rayon de la sphère Σ :

$x^2 - 2\,x + y^2 + 3\,y + z^2 - 6\,z - 5 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (z-3)^2 - 9 - 5 = 0$

$(x-1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 + (z-3)^2 = \frac{69}{4}$

La sphère Σ admet donc pour centre $\mathrm{S}(1\,;-\frac{3}{2}\,;3)$ et pour rayon $\frac{\sqrt{69}}{2}$.

Le centre du cercle se situe à l'intersection du plan π avec la normale au plan π passant par le centre de la sphère S, c'est-à-dire la droite d'équation

$$(n) : \begin{cases} x = & 1 + 5\,\lambda \\ y = & -\frac{3}{2} + 2\,\lambda \\ z = & 3 - \lambda \end{cases} ,\quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

En substituant les coordonnées fournies par l'équation de la normale n dans l'équation du plan π, on obtient :

$5\,(1 + 5\,\lambda) + 2\,(-\frac{3}{2} + 2\,\lambda) - (3 - \lambda) - 3 = 0$

$5 + 25\,\lambda - 3 + 4\,\lambda - 3 + \lambda - 3 = 0$

$30\,\lambda - 4 = 0$

$\lambda = \frac{2}{15}$

Les coordonnées du centre du cercle sont ainsi $\begin{cases} x = & 1 + 5 \cdot \frac{2}{15} = & \frac{5}{3} \\ y = & -\frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{2}{15} = & -\frac{37}{30} \\ z = & 3 - \frac{2}{15} = & \frac{43}{15} \end{cases}$

En résumé, le centre du cercle est $\mathrm{C}(\frac{5}{3}\,;-\frac{37}{30}\,;\frac{43}{15})$.

Grâce au théorème de Pythagore, on calcule le rayon du cercle :

$$r = \sqrt{\Big(\frac{\sqrt{69}}{2}\Big)^2 - \big\|\overrightarrow{\mathrm{CS}}\big\|^2} = \sqrt{\frac{69}{4} - \big((-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{4}{15})^2 + (\frac{2}{15})^2\big)}$$

$$= \sqrt{\frac{69}{4} - \frac{8}{15}} = \sqrt{\frac{1003}{60}}$$

Le centre de la sphère que l'on recherche appartient aussi à la normale n. Ses coordonnées sont donc de la forme $\Omega(1 + 5\,\lambda\,;-\frac{3}{2} + 2\,\lambda\,;3 - \lambda)$.

Si R désigne le rayon de la sphère recherchée, alors on doit avoir :

$$1)\ \ \mathrm{R}^2 = \|\overrightarrow{\Omega\mathrm{P}}\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} 2 - (1 + 5\,\lambda) \\ -1 - (-\frac{3}{2} + 2\,\lambda) \\ 1 - (3 - \lambda) \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} 1 - 5\lambda \\ \frac{1}{2} - 2\,\lambda \\ -2 + \lambda \end{pmatrix}\right\|^2$$

$$= (1 - 5\,\lambda)^2 + (\tfrac{1}{2} - 2\,\lambda)^2 + (-2 + \lambda)^2$$

$$= 1 - 10\,\lambda + 25\,\lambda^2 + \tfrac{1}{4} - 2\,\lambda + 4\,\lambda^2 + 4 - 4\,\lambda + \lambda^2$$

$$= 30\,\lambda^2 - 16\,\lambda + \tfrac{21}{4}$$

$$2)\ \ \mathrm{R}^2 = \Big(\sqrt{\frac{1003}{60}}\Big)^2 + \|\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}\|^2 = \frac{1003}{60} + \left\|\begin{pmatrix} \frac{5}{3} - (1 + 5\,\lambda) \\ -\frac{37}{30} - (-\frac{3}{2} + 2\,\lambda) \\ \frac{43}{15} - (3 - \lambda) \end{pmatrix}\right\|^2$$

$$= \frac{1003}{60} + \left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 5\,\lambda \\ \frac{4}{15} - 2\,\lambda \\ -\frac{2}{15} + \lambda \end{pmatrix} \right\|^2$$
$$= \tfrac{1003}{60} + (\tfrac{2}{3} - 5\,\lambda)^2 + (\tfrac{4}{15} - 2\,\lambda)^2 + (-\tfrac{2}{15} + \lambda)^2$$
$$= \tfrac{1003}{60} + \tfrac{4}{9} - \tfrac{20}{3}\,\lambda + 25\,\lambda^2 + \tfrac{16}{225} - \tfrac{16}{15}\,\lambda + 4\,\lambda^2 + \tfrac{4}{225} - \tfrac{4}{15}\,\lambda + \lambda^2$$
$$= 30\,\lambda^2 - 8\,\lambda + \tfrac{69}{4}$$

En définitive, on est parvenu à l'égalité suivante :
$30\,\lambda^2 - 16\,\lambda + \frac{21}{4} = 30\,\lambda^2 - 8\,\lambda + \frac{69}{4}$
$-8\,\lambda = 12$
$\lambda = -\frac{3}{2}$
Les coordonnées du centre Ω de la sphère que l'on recherche valent par conséquent $\begin{cases} x = 1 + 5 \cdot (-\frac{3}{2}) = -\frac{13}{2} \\ y = -\frac{3}{2} + 2 \cdot (-\frac{3}{2}) = -\frac{9}{2} \\ z = 3 - (-\frac{3}{2}) = \frac{9}{2} \end{cases}$
On a donc obtenu $\Omega(-\frac{13}{2}\,;-\frac{9}{2}\,;\frac{9}{2})$.

On a par ailleurs $\mathrm{R}^2 = 30\,(-\frac{3}{2})^2 - 16 \cdot (-\frac{3}{2}) + \frac{21}{4} = \frac{387}{4}$.

On conclut que la sphère recherchée a pour équation :
$(x + \frac{13}{2})^2 + (y + \frac{9}{2})^2 + (z - \frac{9}{2})^2 = \frac{387}{4}$.