6.8 Manifestement, la première sphère admet pour centre $\mathrm{C}_1(0\,;0\,;0)$ et pour rayon $r_1 = 9$.

Déterminons le centre et le rayon de la seconde sphère Σ_2 :
$x^2 - 4\,x + y^2 - 12\,y + z^2 + 6\,z + 45 = 0$
$(x-2)^2 - 4 + (y-6)^2 - 36 + (z+3)^2 - 9 + 45 = 0$
$(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2 = 4$
La seconde sphère est ainsi centrée en $\mathrm{C}_2(2\,;6\,;-3)$ et a pour rayon $r_2 = 2$.

Attendu que $\delta(\mathrm{C}_1\,;\mathrm{C}_2) = \|\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}\| = \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{49} = 7 = 9 - 2 = r_1 - r_2$,
on conclut que la sphère Σ_2 est tangente intérieurement à la sphère Σ_1.

Calcul du point $\mathrm{T} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$
La droite passant par les points C_1 et C_2 admet pour équation paramétrique
$(\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2) : \begin{cases} x = & 2\,\lambda \\ y = & 6\,\lambda \\ z = & -3\,\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$
Calculons les intersections de cette droite $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$ avec la sphère Σ_1 :
$(2\,\lambda)^2 + (6\,\lambda)^2 + (-3\,\lambda)^2 = 81$
$4\,\lambda^2 + 36\,\lambda^2 + 9\,\lambda^2 - 81 = 0$
$49\,\lambda^2 - 81 = 0$
$(7\,\lambda + 9)\,(7\,\lambda - 9) = 0$

1) $\lambda = -\frac{9}{7}$ délivre les coordonnées $\begin{cases} x = & 2 \cdot (-\frac{9}{7}) = -\frac{18}{7} \\ y = & 6 \cdot (-\frac{9}{7}) = -\frac{54}{7} \\ z = & -3 \cdot (-\frac{9}{7}) = \frac{27}{7} \end{cases}$
Vu que $(-\frac{18}{7}-2)^2 + (-\frac{54}{7}-6)^2 + (\frac{27}{7}+3)^2 = \frac{1024}{49} + \frac{9216}{49} + \frac{2304}{49} = 256 \neq 4$, le point $(-\frac{18}{7}\,;-\frac{54}{7}\,;\frac{27}{7})$ n'appartient pas à la sphère Σ_2.

2) $\lambda = \frac{9}{7}$ fournit les coordonnées $\begin{cases} x = & 2 \cdot \frac{9}{7} = \frac{18}{7} \\ y = & 6 \cdot \frac{9}{7} = \frac{54}{7} \\ z = & -3 \cdot \frac{9}{7} = -\frac{27}{7} \end{cases}$
Comme $(\frac{18}{7}-2)^2 + (\frac{54}{7}-6)^2 + (-\frac{27}{7}+3)^2 = \frac{16}{49} + \frac{144}{49} + \frac{36}{49} = 4$, on a obtenu le point $\mathrm{T}(\frac{18}{7}\,;\frac{54}{7}\,;-\frac{27}{7})$ recherché.

Plan tangent commun aux sphères Σ_1 et Σ_2
Le plan tangent recherché n'est autre que le plan tangent à la sphère Σ_1 au point T :
$\frac{18}{7}\,x + \frac{54}{7}\,y - \frac{27}{7}\,z = 81 \qquad | \cdot \frac{7}{9}$
$2\,x + 6\,y - 3\,z - 63 = 0$

Remarque : le plan tangent s'obtient aussi directement en soustrayant les équations des deux sphères.