6.9 1) Calculons la distance du centre de la sphère $C(1\,;1\,;1)$ au plan π :

$$\delta(C\,;\pi) = \frac{|\,3\cdot 1 + 2\cdot 1 - 6\cdot 1 + 57\,|}{\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}} = \frac{|\,56\,|}{\sqrt{49}} = \frac{56}{7} = 8$$

Le point de la sphère Σ le plus proche du plan π se situe par conséquent à une distance de $\delta(C\,;\pi) - r = 8 - 7 = 1$.

2) Comme $T \in \Sigma$, ses coordonnées doivent satisfaire l'équation

$(7-1)^2 + (3-1)^2 + (c-1)^2 = 49$

$36 + 4 + (c-1)^2 = 49$

$(c-1)^2 - 9 = 0$

$\big((c-1)+3\big)\big((c-1)-3\big) = 0$

$(c+2)\,(c-4) = 0$

Puisque l'énoncé stipule $c > 0$, on conclut que $c = 4$.

Le plan β s'obtient à l'aide de l'équation dédoublée de la sphère :

$(7-1)\,(x-1) + (3-1)\,(y-1) + (4-1)\,(z-1) = 49$

$6\,(x-1) + 2\,(y-1) + 3\,(z-1) - 49 = 0$

$6\,x - 6 + 2\,y - 2 + 3\,z - 3 - 49 = 0$

$6\,x + 2\,y + 3\,z - 60 = 0$

Calculons l'angle aigu entre les plans α et β en déterminant l'angle aigu formé par leurs vecteurs normaux :

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}\right\|\,\left\|\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}\right\|} = \frac{4}{\sqrt{49}\,\sqrt{49}} = \frac{4}{49}$$

$\varphi = \arccos(\frac{4}{49}) \approx 85{,}32^\circ$