4 Suites arithmétiques & géométriques

Suites arithmétiques

4.1 Pour financer son projet de vacances, Vincent décide de mettre de côté 110 fr. par mois. Son épargne actuelle est de 427 fr.
On désigne par u_n l'épargne de Vincent au mois n.

1) Définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.
2) En déduire une formule explicite pour u_n.
3) Si le voyage de Vincent coûte 2270 fr., combien de mois doit-il patienter ?

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Le nombre réel r est appelé **raison** de cette suite.

4.2 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = -3$ et de raison 2. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.

4.3 Les suites suivantes sont-elles des suites arithmétiques ? Si oui, donner leur raison.

1) $u_n = n + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$
2) $u_n = n^2 + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$
3) $u_n = 5\,n + 3 \quad (n \in \mathbb{N})$
4) $u_n = \dfrac{n+2}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$
5) $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4\ ,\, n \geqslant 1 \end{cases}$
6) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n - 1\ ,\, n \geqslant 1 \end{cases}$

4.4 On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = -3\,u_n + 2$ est aussi une suite arithmétique ; quelle est sa raison ?

4.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. On définit une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son terme général $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite arithmétique ; quelle est sa raison ?

4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 10$ et de raison 2. Calculer u_{50}.

4.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Montrer que $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)\,r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.8 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. Connaissant $u_5 = 16$ et $u_9 = 36$, déterminer sa raison et son premier terme.

4.9 Oscar décide de faire un peu plus de sport. Pour cela, il commence par 1 h la première semaine et allonge chaque semaine sa séance de 10 minutes. On note u_n le temps (en minutes) consacré au sport la n^{e} semaine.

1) Que valent u_1, u_2, u_3, u_4 ?
2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
3) Quand Oscar fera-t-il 3 heures de sport ?

4.10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. À l'aide de l'exercice 4.7, montrer la formule $\boxed{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappel : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.11 Calculer les sommes :

1) $5 + 7 + 9 + \ldots + 49$
2) $200 + 201 + 202 + \ldots + 299$
3) $550 + 540 + 530 + \ldots + 100$

4.12 Calculer la somme des 500 premiers nombres impairs.

4.13 Trouver la somme de tous les nombres entiers de 1 à 200 qui ne sont multiples ni de 4, ni de 9.

Suites géométriques

4.14 Un locataire a loué son appartement le 1$^{\text{er}}$ janvier 2001 pour un loyer mensuel de 1380 fr. et subit chaque année une augmentation de 2 %.
On désigne par u_n le loyer mensuel en l'an $2000 + n$.

1) Définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.
2) En déduire une formule explicite pour u_n.
3) À combien s'élèvera le loyer mensuel en 2015 ?

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel r tel que $\boxed{u_{n+1} = u_n \cdot r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Le nombre réel r est appelé **raison** de cette suite.

4.15 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.

1) $u_1 = 1$ et $r = -2$
2) $u_1 = 1$ et $r = \frac{1}{2}$

4.16 Les suites suivantes sont-elles des suites géométriques ? Si oui, donner leur raison.

1) $u_n = 3^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$
2) $u_n = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$
3) $u_n = 2 \cdot 5^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$
4) $u_n = -5^{n-2} \quad (n \in \mathbb{N})$
5) $u_n = n^n \quad (n \in \mathbb{N})$
6) $u_n = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$

4.17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r. On définit une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite géométrique ; quelle est sa raison ?

4.18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_1 = 10$ et de raison 2. Calculer u_{30}.

4.19 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r.

Montrer que $\boxed{u_n = u_1 \cdot r^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.20 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Connaissant $u_4 = 64$ et $u_{11} = 8192$, déterminer sa raison et son premier terme.

4.21 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $r \neq 1$.

1) Montrer que $(1-r)\,(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = u_1 - u_{n+1}$.
2) En déduire que $\boxed{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_1 \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indication : montrer que $u_1 - u_{n+1} = u_1\,(1-r^n)$.

4.22 Calculer les sommes :

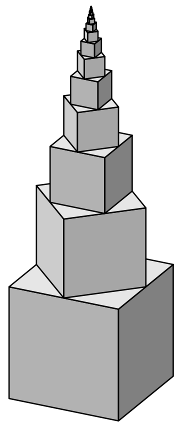
1) $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{20}$
2) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 + \ldots + 1024$
3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{1024}$

4.23 Selon la légende, l'inventeur du jeu d'échecs demanda en récompense de sa découverte : un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux grains pour la deuxième, quatre pour la troisième, et ainsi de suite.

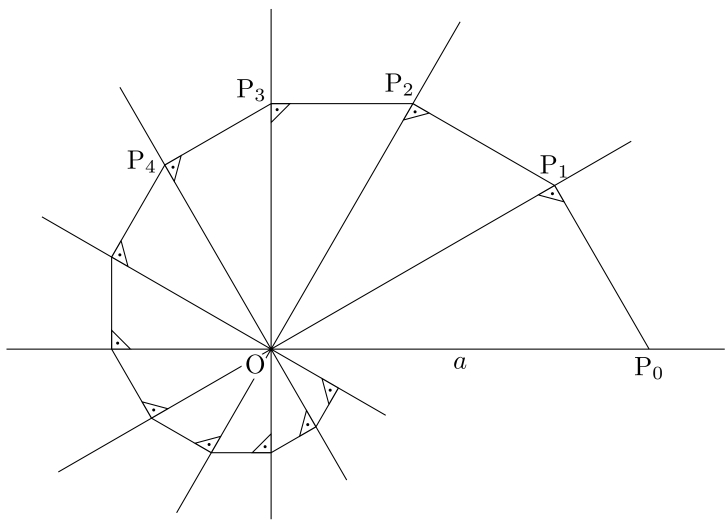
Combien de grains de blé devait-il recevoir sachant que l'échiquier comporte 64 cases ?

4.24 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r avec $-1 < r < 1$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_1 \cdot \dfrac{1}{1-r}$.

4.25 Sur un cube de 1 mètre de côté, on pose un deuxième cube de sorte que les sommets de la base du deuxième cube coïncident avec les milieux des côtés de la face supérieure du premier cube. De la même manière, on pose un troisième cube sur le deuxième et ainsi de suite.
Calculer la hauteur et le volume de cette pile de cubes.



4.26 On considère six droites concourantes en O, chacune déterminant un angle de 30° avec ses voisines. Par un point P_0 d'une des droites, situé à la distance a de O, on abaisse une perpendiculaire sur sa voisine et on trouve ainsi le point P_1. On fait de même avec P_1, P_2, … en créant une spirale.



1) Calculer en fonction de a les distances P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4.
2) Les distances P_nP_{n+1} déterminent une suite ; quel est son terme général ?
3) Quelle est la longueur de la spirale ?

4.27 **Paradoxe de Zénon**

Zénon d'Élée, philosophe grec du V^e siècle av. J.-C., prouve par l'absurde que le mouvement est impossible. En effet, si une flèche devait atteindre sa cible, il faudrait tout d'abord qu'elle parcourt la moitié de la distance qui la sépare de celle-ci. Puis, elle devrait encore parcourir la moitié de la distance restante. L'ayant parcourue, il lui resterait toujours la moitié de la distance restante à parcourir avant d'atteindre la cible. Ce processus se poursuivant indéfiniment, Zénon en conclut que la flèche n'atteindra jamais la cible, puisqu'il lui faut parcourir une infinité de distances.
Comment résoudre ce paradoxe ?

Réponses

4.1 1) $\begin{cases} u_1 = 427 \\ u_{n+1} = u_n + 110 \ , n \geqslant 1 \end{cases}$ 2) $u_n = 427 + (n-1) \cdot 110$

3) 17 mois

4.2 $u_2 = -1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$ et $u_6 = 7$

4.3 1) oui : $r = 1$ 2) non 3) oui : $r = 5$

4) non 5) oui : $r = 4$ 6) non

4.4 La raison de la suite arithmétique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $-3\,r$.

4.5 La raison de la suite arithmétique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $2\,r^2$.

4.6 $u_{50} = 108$

4.8 $u_1 = -4 \quad r = 5$

4.9 1) $u_1 = 60$, $u_2 = 70$, $u_3 = 80$, $u_4 = 90$ 2) $r = 10$ 3) la 13$^{\text{e}}$ semaine

4.11 1) 621 2) 24 950 3) 14 950

4.12 250 000

4.13 13 263

4.14 1) $\begin{cases} u_1 = 1380 \\ u_{n+1} = \frac{102}{100} \cdot u_n \ , n \geqslant 1 \end{cases}$ 2) $u_n = 1380 \cdot \left(\frac{102}{100}\right)^{n-1}$

3) environ 1821 fr.

4.15 1) $u_2 = -2$, $u_3 = 4$, $u_4 = -8$, $u_5 = 16$, $u_6 = -32$

2) $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{4}$, $u_4 = \frac{1}{8}$, $u_5 = \frac{1}{16}$ et $u_6 = \frac{1}{32}$

4.16 1) oui : $r = 3$ 2) non 3) oui : $r = 5$

4) oui : $r = 5$ 5) non 6) oui : $r = -1$

4.17 La raison de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également r.

4.18 $u_{30} = 5\,368\,709\,120$

4.20 $u_1 = 8 \quad r = 2$

4.22 1) 5 230 176 601 2) 683 3) $\frac{683}{1024}$

4.23 18 446 744 073 709 551 615

4.25 hauteur : $2 + \sqrt{2}$ m volume : $\frac{2\,(4+\sqrt{2})}{7}$ m^3

4.26 1) $\mathrm{P_0P_1} = \frac{1}{2}\,a \quad \mathrm{P_1P_2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a \quad \mathrm{P_2P_3} = \frac{3}{8}\,a \quad \mathrm{P_3P_4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}\,a$

2) $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} = \frac{1}{2}\,a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ 3) $(2 + \sqrt{3})\,a$