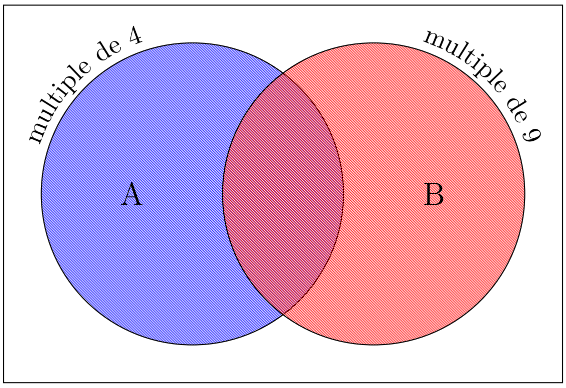
4.13



Soit A l'ensemble des nombres entiers de 1 à 200 qui sont multiples de 4.
Soit B l'ensemble des nombres entiers de 1 à 200 qui sont multiples de 9.
Alors A∩B désigne l'ensemble des nombres entiers de 1 à 200 qui sont multiples de 4 et de 9, c'est-à-dire qui sont multiples de 36.

1) Considérons la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = 1$.
   Évidemment $200 = u_n = u_1 + (n-1)\,r = 1 + (n-1)\cdot 1$ implique $n = 200$.
   $1 + 2 + 3 \ldots + 200 = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{200} = 200 \cdot \dfrac{1+200}{2} = 20\,100$

2) Pour déterminer la somme des éléments de l'ensemble A, considérons la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $v_1 = 4$ et de raison $r = 4$.
   $200 = v_n = v_1 + (n-1)\,r = 4 + (n-1)\cdot 4$ donne $n = 50$.
   $4 + 8 + 12 + \ldots + 200 = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{50} = 50 \cdot \dfrac{4+200}{2} = 5100$

3) Pour déterminer la somme des éléments de l'ensemble B, considérons la suite arithmétique $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $w_1 = 9$ et de raison $r = 9$.
   $200 \geqslant w_n = w_1 + (n-1)\,r = 9 + (n-1)\cdot 9$ donne $n \leqslant 22$.
   $9 + 18 + 27 + \ldots + 198 = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_{22} = 22 \cdot \dfrac{9+198}{2} = 2277$

4) Pour déterminer la somme des éléments de l'ensemble $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, considérons la suite arithmétique $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $t_1 = 36$ et de raison $r = 36$.
   $200 \geqslant t_n = t_1 + (n-1)\,r = 36 + (n-1)\cdot 36$ donne $n \leqslant 5$.
   $36 + 72 + \ldots + 180 = t_1 + t_2 + \ldots + t_5 = 5 \cdot \dfrac{36+180}{2} = 540$

Comme l'illustre le diagramme ci-dessus, en soustrayant la somme des multiples de 4 et la somme des multiples de 9, on retranche à deux reprises (une fois de trop donc) leur intersection, à savoir les multiples de 36.
C'est pourquoi le résultat recherché vaut :

$$20\,100 - (5100 + 2277) + 540 = 13\,263$$