4.16 La condition $u_{n+1} = u_n \cdot r$ équivaut à $r = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{(n+1)+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{3^{n+1} \cdot 3^1}{3^{n+1}} = 3^1 = 3$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi une suite géométrique de raison $r = 3$.

2) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \dfrac{n^2 + 2\,n + 1}{n^2} = \dfrac{n^2}{n^2} + \dfrac{2\,n}{n^2} + \dfrac{1}{n^2} = 1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique.

En effet $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4}{1} \neq \dfrac{9}{4} = \dfrac{u_3}{u_2}$.

3) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2 \cdot 5^{(n+1)+1}}{2 \cdot 5^{n+1}} = \dfrac{2 \cdot 5^{n+1} \cdot 5^1}{2 \cdot 5^{n+1}} = 5^1 = 5$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $r = 5$.

4) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-5^{(n+1)-2}}{-5^{n-2}} = \dfrac{-5^{n-2} \cdot 5^1}{-5^{n-2}} = 5^1 = 5$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est par conséquent une suite géométrique de raison $r = 5$.

5) $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{2^2}{1^1} = \dfrac{4}{1} = 4$

$\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{3^3}{2^2} = \dfrac{27}{4}$

Étant donné que $4 \neq \dfrac{27}{4}$, on conclut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique.

6) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} = -1$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi une suite géométrique de raison $r = -1$.