4.19 **1^re^ preuve**

$u_1 = u_1$

$u_2 = u_1 \cdot r$

$u_3 = u_2 \cdot r$

$u_4 = u_3 \cdot r$

$\dots$

$u_n = u_{n-1} \cdot r$

La multiplication de toutes ces égalités conduit à

$u_1\, u_2\, u_3\, u_4 \cdot \ldots \cdot u_n = u_1 \cdot u_1\, u_2\, u_3 \cdot \ldots \cdot u_{n-1} \cdot r^{n-1}$

En divisant cette dernière équation par $u_1\, u_2\, u_3 \cdot \ldots \cdot u_{n-1}$, on conclut que

$u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$

2^e^ preuve

Montrons la formule $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$ par récurrence.

Initialisation : l'identité $u_1 = u_1 \cdot r^0 = u_1 \cdot 1$ est triviale.

Hérédité : supposons la formule $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = u_n \cdot r = u_1 \cdot r^{n-1} \cdot r = u_1 \cdot r^{(n-1)+1} = u_1 \cdot r^n$$