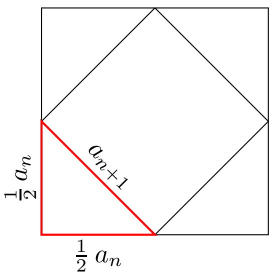
4.25 Désignons par a_n la longueur (en m) des arêtes du cube n.
Puisque les arêtes du premier cube mesurent 1 m, on sait que $a_1 = 1$.



Le théorème de Pythagore donne
$(a_{n+1})^2 = (\frac{1}{2}\,a_n)^2 + (\frac{1}{2}\,a_n)^2$
$a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{1}{4}\,a_n^2 = \frac{1}{2}\,a_n^2$
$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,a_n$

Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $a_1 = 1$ et de raison $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Comme $0 < r = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, la hauteur de la pile de cubes vaut :

$$\lim_{n\to+\infty} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-r} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\,(\sqrt{2}+1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-1} = 2+\sqrt{2}$$

Désignons par v_n le volume (en m^3) du cube n.
Manifestement $v_n = a_n^3$.
En particulier $v_1 = a_1^3 = 1^3 = 1$.
De même $v_{n+1}^3 = a_{n+1}^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_n\right)^3 = \frac{1}{2\,\sqrt{2}}\,a_n^3 = \frac{1}{2\,\sqrt{2}}\,v_n$.
Il apparaît ainsi que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 1$ et de raison $r = \frac{1}{2\,\sqrt{2}}$.

Vu que $0 < r = \frac{1}{2\,\sqrt{2}} < 1$, le volume de la pile de cubes vaut :

$$\lim_{n\to+\infty} v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = v_1 \cdot \frac{1}{1-r} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2\,\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{2\,\sqrt{2}-1}{2\,\sqrt{2}}} = \frac{2\,\sqrt{2}}{2\,\sqrt{2}-1} = \frac{2\,\sqrt{2}\,(2\,\sqrt{2}+1)}{(2\,\sqrt{2}-1)\,(2\,\sqrt{2}+1)} = \frac{8+2\,\sqrt{2}}{8-1} = \frac{2\,(4+\sqrt{2})}{7}$$