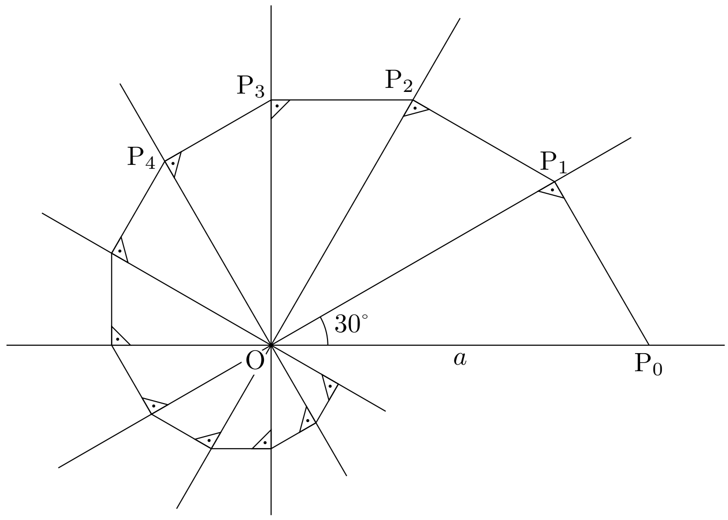
4.26



$P_0P_1 = a\,\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}\,a$

Les triangles OP_nP_{n+1} et $OP_{n+1}P_{n+2}$ sont semblables pour tout $n \geqslant 0$:

$$\frac{OP_n}{OP_{n+1}} = \frac{OP_{n+1}}{OP_{n+2}} = \frac{P_nP_{n+1}}{P_{n+1}P_{n+2}}$$

Il en résulte $P_{n+1}P_{n+2} = \dfrac{OP_{n+1}}{OP_n}\,P_nP_{n+1} = \cos(30^\circ)\,P_nP_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,P_nP_{n+1}$.

Par conséquent, la suite $(P_nP_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}\,a$ et de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C'est pourquoi $P_nP_{n+1} = \frac{1}{2}\,a\,(\frac{\sqrt{3}}{2})^n$.

Étant donné que $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, la longueur de la spirale vaut :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_nP_{n+1} = \frac{1}{2}\,a \cdot \dfrac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\,a \cdot \dfrac{1}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\,a \cdot \frac{2}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}\,a = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3})}\,a = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3}\,a = (2+\sqrt{3})\,a$