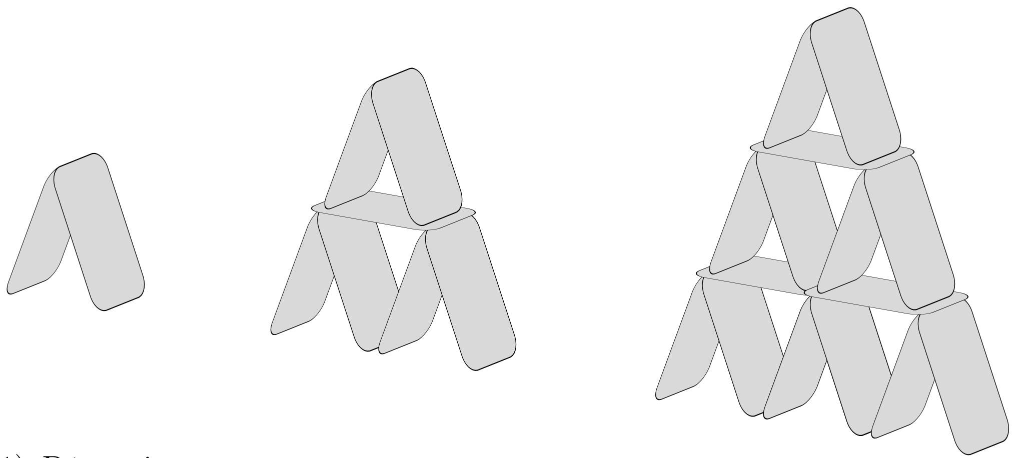
2 Suites réelles

2.1 Un patient doit prendre une fois par jour un médicament composé de 12 mg de cermoxène. L'expérience a montré que le corps humain élimine en 24 heures la moitié de la dose de cermoxène qu'il contient.

On appelle u_n le nombre de mg de cermoxène contenus dans le corps du patient n jours après le début du traitement.

1) Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3) Conjecturer une formule explicite pour u_n (en fonction de n).
4) Démontrer cette formule par récurrence.

2.2 La construction d'un château de cartes à n étages nécessite u_n cartes.



1) Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3) Conjecturer une formule explicite pour u_n (en fonction de n).
4) Démontrer cette formule par récurrence.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

Une **suite réelle** est une application de A vers $\mathbb{R}$.

Si l'application $\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$ est une suite réelle, on dit souvent que u_n en est le **terme général** ou encore le **terme de rang** n. On désigne généralement cette suite par $(u_n)_{n\in \mathrm{A}}$ ou, plus simplement encore, par (u_n).

Une suite est dite **finie** si le sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ est fini. Une suite qui n'est pas finie est une suite **infinie**.

Une suite peut être définie

1) en donnant son terme général u_n en fonction de n ;
2) en indiquant ses premiers termes et une relation de récurrence.

Par exemple, la suite des nombres pairs 2, 4, 6, 8, … peut-être définie par :

1) $u_n = 2\,n \ , n \in \mathbb{N}$

2) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \ , n \geqslant 1 \end{cases}$

2.3 Calculer les cinq premiers termes u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 de la suite définie par :

1) $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ 2) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ 3) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

4) $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 5) $u_n = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ 6) $u_n = \dfrac{1}{n} \cdot \sin\left(\dfrac{n\,\pi}{2}\right)$

7) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + 2\,u_n \ , n \geqslant 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{3} \ , n \geqslant 1 \end{cases}$

2.4 Trouver le terme général des suites suggérées par :

1) $5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; \ldots$ 2) $4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; \ldots$

3) $2 ; 8 ; 18 ; 32 ; 50 ; \ldots$ 4) $1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; -\frac{1}{4} ; \ldots$

5) $-\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{4} ; \frac{2}{5} ; \frac{3}{6} ; \frac{4}{7} ; \ldots$ 6) $1{,}1 ; 1{,}01 ; 1{,}001 ; 1{,}0001 ; \ldots$

7) $0 ; 2 ; 0 ; 2 ; 0 ; 2 ; \ldots$ 8) $0 ; -1 ; 0 ; 1 ; 0 ; -1 ; 0 ; 1 ; 0 ; -1 ; \ldots$

2.5 Définir par une relation de récurrence les suites suggérées par :

1) $3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; \ldots$ 2) $5 ; 11 ; 23 ; 47 ; 95 ; \ldots$

3) $1 ; 2 ; 6 ; 24 ; 120 ; 720 ; \ldots$ 4) $1 ; 10 ; 101 ; 1010 ; 10101 ; \ldots$

2.6 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie de manière récursive par :

1) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1 \ , n \geqslant 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2\,u_n - u_{n-1} \ , n \geqslant 2 \end{cases}$

Deviner une expression pour le terme de rang n et la démontrer par récurrence.

2.7 **Suite de Fibonacci**

Dans son ouvrage le *Liber Abaci*, le mathématicien italien Leonardo Pisano (1175-1250), plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci, pose le problème suivant :

> « Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ? »

Dans cette population idéale de lapins, on suppose que :
– le premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
– les lapereaux ne sont pubères qu'à partir du deuxième mois ;
– chaque mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;
– les lapins ne meurent jamais.

On désigne par u_n le nombre de couples de lapins au mois n ; on appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci.

1) Définir par une relation de récurrence la suite de Fibonacci.
2) Démontrer que $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Calculer l'expression $u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ pour quelques valeurs de n.
   Démontrer ce que les résultats laissent supposer.
4) Démontrer la formule de Binet (mathématicien français, 1786-1856) :
   $u_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sens de variation d'une suite

Une suite (u_n) est dite **croissante** si chaque terme est supérieur ou égal à son précédent : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
Une suite (u_n) est dite **décroissante** si chaque terme est inférieur ou égal à son précédent : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Une suite est dite **monotone** si elle est croissante ou si elle est décroissante.
De manière analogue, on définit une suite *strictement croissante*, *strictement décroissante* ou *strictement monotone* lorsque l'inégalité qui lie ses termes est stricte.
Une suite est dite **constante** si tous ses termes sont égaux : $u_{n+1} = u_n$.

Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on peut :

1) déterminer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
2) comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ;
3) montrer par récurrence que $u_{n+1} \geqslant u_n$ ou $u_{n+1} \leqslant u_n$;
4) utiliser le sens de variation d'une fonction f, lorsqu'une suite (u_n) est telle que $u_n = f(n)$:
   (a) si f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite (u_n) est croissante ;
   (b) si f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite (u_n) est décroissante.

2.8 Étudier le sens de variation des suites :

1) $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$
2) $u_n = \dfrac{1}{n}$
3) $u_n = n + \dfrac{3}{4\,n+2}$
4) $u_n = \dfrac{3\,n-1}{5\,n-2}$
5) $u_n = \sqrt{n} - 3$
6) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{2} \end{cases}, n \geqslant 1$

Suite majorée ou minorée

Une suite $(u_n)_{n\in\mathrm{A}}$ est dite **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que $u_n \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathrm{A}$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathrm{A}}$ est dite **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que $u_n \geqslant m$ pour tout $n \in \mathrm{A}$.

Une suite majorée et minorée est dite **bornée** ; la **borne supérieure** de la suite est le plus petit majorant de cette suite ; la **borne inférieure** de la suite est le plus grand minorant de cette suite.

Remarque : une suite croissante est minorée (par son premier terme) ; une suite décroissante est majorée (par son premier terme).

2.9 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{2\,n-7}{3\,n+2}$.

1) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2) Démontrer que cette suite admet 1 pour majorant.

2.10 Démontrer que $\frac{1}{2}$ est un minorant de la suite $\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.11 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de manière récursive par

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n}\ , n \geqslant 1 \end{cases}.$$

1) Écrire les quatre premiers termes de cette suite.
2) Démontrer par récurrence que cette suite est croissante et majorée.

2.12 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de manière récursive par

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n + 35}\ , n \geqslant 1 \end{cases}.$$

Démontrer par récurrence que cette suite est croissante et majorée par 7.

2.13 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de manière récursive par

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{9}{u_n}\right)\ , n \geqslant 1 \end{cases}.$$

1) Cette suite est-elle minorée ?
2) Démontrer que cette suite est strictement décroissante.

2.14 Donner un exemple d'une suite qui n'est

1) ni majorée, ni minorée ;
2) ni croissante, ni décroissante, mais bornée.

Réponses

2.1 1) $u_1 = 12$, $u_2 = 18$, $u_3 = 21$, $u_4 = \frac{45}{2}$, $u_5 = \frac{93}{4}$

2) $u_{n+1} = \frac{1}{2}\, u_n + 12$

3) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}} \cdot 12$

2.2 1) $u_1 = 2$, $u_2 = 7$, $u_3 = 15$, $u_4 = 26$, $u_5 = 40$

2) $u_{n+1} = u_n + 3\,n + 2$

3) $u_n = \dfrac{n\,(3\,n+1)}{2}$

2.3 1) $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{4}{3}$, $u_3 = \frac{5}{4}$, $u_4 = \frac{6}{5}$, $u_5 = \frac{7}{6}$

2) $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{2}{3}$, $u_4 = \frac{3}{4}$, $u_5 = \frac{4}{5}$

3) $u_1 = -1$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = -\frac{1}{9}$, $u_4 = \frac{1}{16}$, $u_5 = -\frac{1}{25}$

4) $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2}$, $u_3 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $u_4 = 4$, $u_5 = \frac{16\sqrt{5}}{5}$

5) $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2}$, $u_3 = \frac{7}{4}$, $u_4 = \frac{15}{8}$, $u_5 = \frac{31}{16}$

6) $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = -\frac{1}{3}$, $u_4 = 0$, $u_5 = \frac{1}{5}$

7) $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_3 = 11$, $u_4 = 23$, $u_5 = 47$

8) $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{1}{3}$, $u_3 = -\frac{5}{9}$, $u_4 = -\frac{23}{27}$, $u_5 = -\frac{77}{81}$

2.4 1) $u_n = 5\,n$ 2) $u_n = 3\,n + 1$ 3) $u_n = 2\,n^2$ 4) $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

5) $u_n = \dfrac{n-2}{n+1}$ 6) $u_n = 1 + \dfrac{1}{10^n}$ 7) $u_n = 1 + (-1)^n$ 8) $u_n = \cos\left(\dfrac{n\,\pi}{2}\right)$

2.5 1) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \ , n \geqslant 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 2\,u_n + 1 \ , n \geqslant 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = (n+1)\,u_n \ , n \geqslant 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 10\,u_n + \dfrac{1+(-1)^n}{2} \ , n \geqslant 1 \end{cases}$

2.6 1) $u_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ 2) $u_n = n$

2.7 1) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \ , n \geqslant 2 \end{cases}$ 3) $u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} = (-1)^{n-1}$

2.8 1) croissante 2) décroissante

3) croissante 4) décroissante

5) croissante 6) décroissante

2.11 1) $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt[4]{2^3}$, $u_3 = \sqrt[8]{2^7}$, $u_4 = \sqrt[16]{2^{15}}$

2.13 2) La borne inférieure est 3.