2.1

1) $u_1 = 12$

$u_2 = \frac{1}{2}\,u_1 + 12 = \frac{1}{2} \cdot 12 + 12 = 18$

$u_3 = \frac{1}{2}\,u_2 + 12 = \frac{1}{2} \cdot 18 + 12 = 21$

$u_4 = \frac{1}{2}\,u_3 + 12 = \frac{1}{2} \cdot 21 + 12 = \frac{45}{2}$

$u_5 = \frac{1}{2}\,u_4 + 12 = \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{2} + 12 = \frac{93}{4}$

2) $u_{n+1} = \frac{1}{2}\,u_n + 12$

3) Exprimons les premiers termes de la suite en fonction de $u_1 = 12$:

$u_1 = u_1$

$u_2 = \frac{1}{2}\,u_1 + u_1 = \frac{3}{2}\,u_1$

$u_3 = \frac{1}{2}\,u_2 + u_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\,u_1 + u_1 = \frac{7}{4}\,u_1$

$u_4 = \frac{1}{2}\,u_3 + u_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4}\,u_1 + u_1 = \frac{15}{8}\,u_1$

$u_5 = \frac{1}{2}\,u_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8}\,u_1 + u_1 = \frac{31}{16}\,u_1$

On en vient à supposer que le terme général de cette suite est donné par :

$u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}\,u_1 = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}} \cdot 12$

4) Démontrons cette formule par récurrence :

Initialisation : pour $n = 1$, l'égalité $12 = \dfrac{2^1 - 1}{2^{1-1}} \cdot 12$ est bien vérifiée.

Hérédité : Supposons la formule $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}} \cdot 12$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \tfrac{1}{2}\,u_n + 12 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \cdot 12 + 12 = \left(\frac{2^n - 1}{2^n} + 1\right) \cdot 12 \\ &= \frac{2^n - 1 + 2^n}{2^n} \cdot 12 = \frac{2 \cdot 2^n - 1}{2^n} \cdot 12 = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{(n+1)-1}} \cdot 12 \end{aligned}$$