2.10 Pour montrer que la suite $\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\dfrac{1}{2}$, il faut prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{n^2}{n^2+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{n^2}{n^2+1} - \dfrac{1}{2} \geqslant 0$.

$$\frac{n^2}{n^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2\,n^2 - (n^2+1)}{2\,(n^2+1)} = \frac{n^2-1}{2\,(n^2+1)} = \frac{(n+1)\,(n-1)}{2\,(n^2+1)} \geqslant 0$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

1) $n+1 \geqslant 2 > 0$
2) $n-1 \geqslant 0$
3) $n^2 \geqslant 1$ et $n^2+1 \geqslant 2 > 0$