2.11 1) $u_1 = \sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1}$

$$u_2 = \sqrt{2\,u_1} = \sqrt{2\,\sqrt{2}} = \sqrt{2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$$

$$u_3 = \sqrt{2\,u_2} = \sqrt{2\,\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt{2^1 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2^{1+\frac{3}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{7}{4}}}$$
$$= \left(2^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{2^7}$$

$$u_4 = \sqrt{2\,u_3} = \sqrt{2\,\sqrt[8]{2^7}} = \sqrt{2^1 \cdot 2^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{2^{1+\frac{7}{8}}} = \sqrt{2^{\frac{15}{8}}}$$
$$= \left(2^{\frac{15}{8}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{15}{16}} = \sqrt[16]{2^{15}}$$

2) (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Initialisation : $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[2]{2^1}} = \dfrac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} > 1.$

Puisque $u_1 = \sqrt{2} > 0$, l'inégalité $\dfrac{u_2}{u_1} > 1$ implique $u_2 > u_1$.

Hérédité : Supposons que $u_n < u_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Cette hypothèse de récurrence implique :

$u_n < u_{n+1}$
$2\,u_n < 2\,u_{n+1}$
$\sqrt{2\,u_n} < \sqrt{2\,u_{n+1}}$
$u_{n+1} < u_{n+2}$

On a ainsi démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.

Initialisation : l'inégalité $u_1 = \sqrt{2} \leqslant 2$ est évidente.

Hérédité : Supposons que $u_n \leqslant 2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

De cette hypothèse de récurrence, on tire que :

$u_n \leqslant 2$
$2\,u_n \leqslant 4$
$\sqrt{2\,u_n} \leqslant \sqrt{4}$
$u_{n+1} \leqslant 2$