2.12 1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Initialisation : $u_2 = \sqrt{2\,u_1 + 35} = \sqrt{2 \cdot 0 + 35} = \sqrt{35} > 0 = u_1$

Hérédité : Supposons que $u_n < u_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

L'hypothèse de récurrence donne :

$u_n < u_{n+1}$

$2\,u_n < 2\,u_{n+1}$

$2\,u_n + 35 < 2\,u_{n+1} + 35$

$\sqrt{2\,u_n + 35} < \sqrt{2\,u_{n+1} + 35}$

$u_{n+1} < u_{n+2}$

On a ainsi démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 7.

Initialisation : $u_1 = 0 < 7$

Hérédité : Supposons que $u_n < 7$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

De l'hypothèse de récurrence, on infère que :

$u_n < 7$

$2\,u_n < 14$

$2\,u_n + 35 < 49$

$\sqrt{2\,u_n + 35} < \sqrt{49}$

$u_{n+1} < 7$

On a donc prouvé que $u_n < 7$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.