2.13 1) Montrons par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 3.

Initialisation : L'inégalité $u_1 = 5 \geqslant 3$ est triviale.

Hérédité : Supposons que $u_n \geqslant 3$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Il s'agit de prouver que $u_{n+1} \geqslant 3$, c'est-à-dire que $u_{n+1} - 3 \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 3 &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{9}{u_n}\right) - 3 = \frac{u_n}{2} + \frac{9}{2\,u_n} - 3 \\ &= \frac{u_n^2 - 6\,u_n + 9}{2\,u_n} = \frac{(u_n - 3)^2}{2\,u_n} \geqslant 0 \end{aligned}$$

En effet $(u_n - 3)^2 \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 3$ implique $2\,u_n \geqslant 6 > 0$.

2) Pour prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il faut montrer que $u_{n+1} \leqslant u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{9}{u_n}\right) - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{9}{2\,u_n} - u_n = \frac{9}{2\,u_n} - \frac{u_n}{2} \\ &= \frac{9 - u_n^2}{2\,u_n} = \frac{(3 + u_n)\,(3 - u_n)}{2\,u_n} \leqslant 0 \end{aligned}$$

En effet, l'inégalité $u_n \geqslant 3$ implique :

(a) $3 + u_n \geqslant 6 \geqslant 0$

(b) $-u_n \leqslant -3$, d'où suit $3 - u_n \leqslant 0$

(c) $2\,u_n \geqslant 6 > 0$