2.2 1) $u_1 = 2$

$u_2 = 2 \cdot 2 + 1 + u_1 = 4 + 1 + 2 = 7$

$u_3 = 3 \cdot 2 + 2 + u_2 = 6 + 2 + 7 = 15$

$u_4 = 4 \cdot 2 + 3 + u_3 = 8 + 3 + 15 = 26$

$u_5 = 5 \cdot 2 + 4 + u_4 = 10 + 4 + 26 = 40$

2) $u_{n+1} = (n+1) \cdot 2 + n + u_n = u_n + 3\,n + 2$

3) La relation de récurrence donne les égalités suivantes :

$$\begin{array}{llll}
u_1 & = & & 2 \\
u_2 & = u_1 & + 3 \cdot 1 & + 2 \\
u_3 & = u_2 & + 3 \cdot 2 & + 2 \\
u_4 & = u_3 & + 3 \cdot 3 & + 2 \\
u_5 & = u_4 & + 3 \cdot 4 & + 2 \\
\vdots & & & \\
u_n & = u_{n-1} & + 3 \cdot (n-1) & + 2
\end{array}$$

L'addition de toutes ces équations donne :

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1} + 3 \cdot (1+2+3+4+\ldots+n-1) + n \cdot 2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
u_n &= 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n - 1) + n \cdot 2 \\
&= 3 \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} + 2\,n \\
&= n\left(\frac{3\,(n-1)}{2} + 2\right) = n\left(\frac{3\,n - 3 + 4}{2}\right) = n \cdot \frac{3\,n+1}{2} = \frac{n\,(3\,n+1)}{2}
\end{aligned}$$

4) Démontrons la formule $u_n = \dfrac{n\,(3\,n+1)}{2}$ par récurrence.

Initialisation : pour $n = 1$, l'identité $u_1 = 2 = \dfrac{1\,(3 \cdot 1 + 1)}{2}$ est établie.

Hérédité : Supposons que $u_n = \dfrac{n\,(3\,n+1)}{2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + 3\,n + 2 = \frac{n\,(3\,n+1)}{2} + 3\,n + 2 \\
&= \frac{n\,(3\,n+1) + 6\,n + 4}{2} = \frac{3\,n^2 + 7\,n + 4}{2} \\
&= \frac{(n+1)\,(3\,n+4)}{2} = \frac{(n+1)\,\big(3\,(n+1)+1\big)}{2}
\end{aligned}$$