2.7

1) – Le premier mois voit l'apparition du premier couple de lapereaux : $u_1 = 1$.
   – Le deuxième mois, les lapereaux sont devenus pubères et ont procréé un nouveau couple qui demeure encore en gestation : $u_2 = 1$.
   – Le troisième mois, le premier couple donne naissance à un deuxième couple : $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$. Pendant ce temps, le premier couple s'accouple à nouveau pour engendrer un nouveau couple pour le mois prochain, tandis que le couple nouvellement né va atteindre la puberté.
   – Le quatrième mois, une nouvelle naissance porte le nombre des couples à $u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$. Il y a dorénavant $u_2 = 2$ couples pubères qui s'accouplent pour donner naissance, le mois suivant à $u_2 = 2$ nouveaux couples.
   – Le cinquième mois, il y a déjà $u_4 = 3$ couples auxquels viennent s'ajouter les naissances de $u_3 = 2$ nouveaux couples. Le nombre des couples s'élève ainsi à $u_5 = u_4 + u_3 = 3 + 2 = 5$. Les $u_3 = 3$ couples pubères s'accouplent à nouveau pour engendrer autant de nouveaux couples le mois suivant.
   – ...
   – Au $n + 1^{\text{e}}$ mois, la population du mois précédent u_n s'accroît de u_{n-1} nouveaux couples qu'engendrent les u_{n-1} couples qui étaient pubères le mois précédent. On obtient la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

   En résumé, la suite de Fibonacci se définit par la relation de récurrence :
   $$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}\ , n \geqslant 2 \end{cases}$$

2) Démontrons par récurrence la formule $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : si $n = 1$, alors $u_1^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = u_1\, u_2$;
   si $n = 2$, on a bien $u_1^2 + u_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2 = u_2\, u_3$.

   Hérédité supposons la formule $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
   $$\underbrace{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}_{u_n \cdot u_{n+1}} + u_{n+1}^2 = u_n \cdot u_{n+1} + u_{n+1}^2 = u_{n+1}\, \underbrace{(u_n + u_{n+1})}_{u_{n+2}}$$
   $$= u_{n+1} \cdot u_{n+2} = u_{n+1} \cdot u_{(n+1)+1}$$

3) Calculons les premiers termes de l'expression $u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1}$:
   $u_2^2 - u_1 \cdot u_3 = 1^2 - 1 \cdot 2 = -1$
   $u_3^2 - u_2 \cdot u_4 = 2^2 - 1 \cdot 3 = 1$
   $u_4^2 - u_3 \cdot u_5 = 3^2 - 2 \cdot 5 = -1$
   $u_5^2 - u_4 \cdot u_6 = 5^2 - 3 \cdot 8 = 1$

   Ces résultats conduisent à conjecturer la formule $u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} = (-1)^{n-1}$ qu'il s'agit encore de démontrer par récurrence.

Initialisation : les calculs précédents montrent que la formule est vraie pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Hérédité : supposons la formule $u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} = (-1)^{n-1}$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1}^2 - u_{(n+1)-1} \cdot u_{(n+1)+1} =$
$u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} =$
$u_{n+1} \cdot u_{n+1} - u_n \cdot u_{n+2} =$
$u_{n+1} \cdot (u_n + u_{n-1}) - u_n \cdot (u_{n+1} + u_n) =$
$u_{n+1} \cdot u_n + u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_{n+1} \cdot u_n - u_n^2 =$
$-u_n^2 + u_{n+1} \cdot u_{n-1} =$
$(-1) \cdot (u_n^2 - u_{n+1} \cdot u_{n-1}) =$
$(-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n = (-1)^{(n+1)-1}$

4) Montrons par récurrence la formule $u_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Si $n = 1$, on a :

$$\frac{(1+\sqrt{5})^1 - (1-\sqrt{5})^1}{\sqrt{5} \cdot 2^1} = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 = u_1$$

Si $n = 2$, on obtient :

$$\frac{(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2}{\sqrt{5} \cdot 2^2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1 = u_2$$

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ tel que $u_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}$ et

$$u_{n-1} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}}{\sqrt{5} \cdot 2^{n-1}}.$$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = u_n + u_{n-1} &= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}}{\sqrt{5} \cdot 2^{n-1}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n + 2\,(1+\sqrt{5})^{n-1} - 2\,(1-\sqrt{5})^{n-1}}{\sqrt{5} \cdot 2^n} \\
&= \frac{\big((1+\sqrt{5})^n + 2\,(1+\sqrt{5})^{n-1}\big) - \big((1-\sqrt{5})^n + 2\,(1-\sqrt{5})^{n-1}\big)}{\sqrt{5} \cdot 2^n} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}\big((1+\sqrt{5})+2\big) - (1-\sqrt{5})^{n-1}\big((1-\sqrt{5})+2\big)}{\sqrt{5} \cdot 2^n} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}\,(3+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})^{n-1}\,(3-\sqrt{5})}{\sqrt{5} \cdot 2^n} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} \cdot \frac{1}{2}\,(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^{n-1} \cdot \frac{1}{2}\,(1-\sqrt{5})^2}{\sqrt{5} \cdot 2^n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2}\big((1+\sqrt{5})^{(n-1)+2} - (1-\sqrt{5})^{(n-1)+2}\big)}{\sqrt{5}\cdot 2^n} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{\sqrt{5}\cdot 2^{n+1}}
\end{aligned}
$$