2.8 1) Calculons les premiers termes de la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$:

$$u_1 = \frac{1^2}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$
$$u_2 = \frac{2^2}{2^2+1} = \frac{4}{5}$$
$$u_3 = \frac{3^2}{3^2+1} = \frac{9}{10}$$
$$u_4 = \frac{4^2}{4^2+1} = \frac{16}{17}$$
$$u_5 = \frac{5^2}{5^2+1} = \frac{25}{26}$$

L'examen des premiers termes révèle les inégalités $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < u_5$, ce qui prête à penser que cette suite est strictement croissante.

Prouvons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante en montrant que $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{n^2+1} \\
&= \frac{(n+1)^2\,(n^2+1) - n^2\,\big((n+1)^2+1\big)}{\big(n^2+1\big)\,\big((n+1)^2+1\big)} \\
&= \frac{n^2\,(n+1)^2 + (n+1)^2 - n^2\,(n+1)^2 - n^2}{\big(n^2+1\big)\,\big((n+1)^2+1\big)} \\
&= \frac{(n+1)^2 - n^2}{\big(n^2+1\big)\,\big((n+1)^2+1\big)} \\
&= \frac{\big((n+1)-n\big)\,\big((n+1)+n\big)}{\big(n^2+1\big)\,\big((n+1)^2+1\big)} \\
&= \frac{2\,n+1}{\big(n^2+1\big)\,\big((n+1)^2+1\big)} > 0
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est bien strictement positive lorsque $n \geqslant 1$:

(a) $n \geqslant 1$ implique d'abord $2\,n \geqslant 2$, puis $2\,n+1 \geqslant 3 > 0$;

(b) $n \geqslant 1$ donne $n^2 \geqslant 1$ et $n^2+1 \geqslant 2 > 0$;

(c) $n \geqslant 1$ fournit $n+1 \geqslant 2$, puis $(n+1)^2 \geqslant 4$ et enfin $(n+1)^2+1 \geqslant 5 > 0$.

2) Déterminons les premiers termes de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$:

$$u_1 = \frac{1}{1} = 1$$
$$u_2 = \frac{1}{2}$$
$$u_3 = \frac{1}{3}$$

$u_4 = \dfrac{1}{4}$

$u_5 = \dfrac{1}{5}$

La considération des premiers termes de cette suite laisse supposer qu'elle est strictement décroissante : $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5$.

Prouvons de deux façons que cette suite est bien strictement décroissante.

(a) $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n\,(n+1)} = \frac{-1}{n\,(n+1)} < 0$$

car $n \geqslant 1 > 0$ et $n+1 \geqslant 2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$$

En effet, l'inégalité $n < n+1$ implique $\dfrac{n}{n+1} < 1$, vu que $n+1 > 0$.

3) Calculons les premiers termes de la suite dont le terme général est $u_n = n + \dfrac{3}{4\,n+2}$:

$u_1 = 1 + \dfrac{3}{4 \cdot 1 + 2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

$u_2 = 2 + \dfrac{3}{4 \cdot 2 + 2} = 2 + \dfrac{3}{10} = \dfrac{23}{10} = 2{,}3$

$u_3 = 3 + \dfrac{3}{4 \cdot 3 + 2} = 3 + \dfrac{3}{14} = \dfrac{45}{14} \approx 3{,}214$

$u_4 = 4 + \dfrac{3}{4 \cdot 4 + 2} = 4 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{25}{6} \approx 4{,}167$

$u_5 = 5 + \dfrac{3}{4 \cdot 5 + 2} = 5 + \dfrac{3}{22} = \dfrac{113}{22} \approx 5{,}136$

La comparaison des premiers termes de cette suite donne $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < u_5$, de sorte que l'on conjecture que cette suite est strictement croissante.

Montrons que $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(n + 1 + \frac{3}{4\,(n+1)+2}\right) - \left(n + \frac{3}{4\,n+2}\right) \\ &= n + 1 + \frac{3}{4\,n+6} - n - \frac{3}{4\,n+2} \\ &= 1 + \frac{3}{2\,(2\,n+3)} - \frac{3}{2\,(2\,n+1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\,(2\,n+1)\,(2\,n+3)+3\,(2\,n+1)-3\,(2\,n+3)}{2\,(2\,n+1)\,(2\,n+3)} \\
&= \frac{8\,n^2+16\,n+6+6\,n+3-6\,n-9}{2\,(2\,n+1)\,(2\,n+3)} \\
&= \frac{8\,n^2+16\,n}{2\,(2\,n+1)\,(2\,n+3)} \\
&= \frac{8\,n\,(n+2)}{2\,(2\,n+1)\,(2\,n+3)} = \frac{4\,n\,(n+2)}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)} > 0
\end{aligned}
$$

Cette dernière expression est bien positive, car $4>0$, $n>0$, $n+2>0$, $2\,n+1>0$ et $2\,n+3>0$, étant donné que $n \geqslant 1$.

4) Calculons les premiers termes de la suite de terme général $u_n = \dfrac{3\,n-1}{5\,n-2}$:

$u_1 = \dfrac{3\cdot 1-1}{5\cdot 1-2} = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}667$

$u_2 = \dfrac{3\cdot 2-1}{5\cdot 2-2} = \dfrac{5}{8} \approx 0{,}625$

$u_3 = \dfrac{3\cdot 3-1}{5\cdot 3-2} = \dfrac{8}{13} \approx 0{,}615$

$u_4 = \dfrac{3\cdot 4-1}{5\cdot 4-2} = \dfrac{11}{18} \approx 0{,}611$

$u_5 = \dfrac{3\cdot 5-1}{5\cdot 5-2} = \dfrac{14}{23} \approx 0{,}609$

On constate que $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5$, si bien que l'on peut supposer que cette suite est strictement décroissante.

Prouvons cette conjecture de deux manières.

(a) $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{3\,(n+1)-1}{5\,(n+1)-2} - \frac{3\,n-1}{5\,n-2} = \frac{3\,n+2}{5\,n+3} - \frac{3\,n-1}{5\,n-2} \\
&= \frac{(3\,n+2)\,(5\,n-2)-(3\,n-1)\,(5\,n+3)}{(5\,n+3)\,(5\,n-2)} \\
&= \frac{15\,n^2+4\,n-4-15\,n^2-4\,n+3}{(5\,n+3)\,(5\,n-2)} \\
&= \frac{-1}{(5\,n+3)\,(5\,n-2)} < 0
\end{aligned}
$$

Cette dernière expression est bien négative pour tout $n \in \mathbb{N}$, car $n \geqslant 1$ implique $5\,n \geqslant 5$ d'où suivent d'une part $5\,n+3 \geqslant 8 > 0$ et d'autre part $5\,n-2 \geqslant 3 > 0$.

(b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{3\,(n+1)-1}{5\,(n+1)-2}}{\dfrac{3\,n-1}{5\,n-2}} = \frac{\dfrac{3\,n+2}{5\,n+3}}{\dfrac{3\,n-1}{5\,n-2}} = \frac{3\,n+2}{5\,n+3} \cdot \frac{5\,n-2}{3\,n-1}$$

$$= \frac{15\,n^2+4\,n-4}{15\,n^2+4\,n-3} = \frac{(15\,n^2+4\,n-3)-1}{15\,n^2+4\,n-3} < 1$$

Pour conclure à cette dernière égalité, il faut encore prouver que $15\,n^2+4\,n-3>0$; l'inégalité $\dfrac{x-1}{x}<1$ équivaut en effet à :

$\dfrac{x-1}{x}-1 = \dfrac{(x-1)-x}{x} = \dfrac{-1}{x} < 0$

elle n'est donc vérifiée que si $x>0$.

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-3) = 196 = 14^2$

$n_1 = \frac{-4-14}{2\cdot 15} = -\frac{3}{5}$ et $n_2 = \frac{-4+14}{2\cdot 15} = \frac{1}{3}$

Le polynôme $15\,n^2+4\,n-3$ est donc positif si $n \in]-\infty\,;-\frac{3}{5}[\cup]\frac{1}{3}\,;+\infty[$.

En particulier, on a bien $15\,n^2+4\,n-3>0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Calculons les premiers termes de la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}-3$:

$u_1 = \sqrt{1}-3 = 1-3 = -2$

$u_2 = \sqrt{2}-3 \approx -1{,}586$

$u_3 = \sqrt{3}-3 \approx -1{,}268$

$u_4 = \sqrt{4}-3 = 2-3 = -1$

$u_5 = \sqrt{5}-3 \approx -0{,}764$

Il apparaît que $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < u_5$, d'où l'on postule que cette suite est strictement croissante.

Démontrons ce postulat :

La fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: si $x<y$ alors $\sqrt{x}<\sqrt{y}$. De même, $x<y$ implique que $\sqrt{x}-3<\sqrt{y}-3$. Cela signifie que la fonction $g(x)=\sqrt{x}-3$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Étant donné que $u_n = g(n)$, on conclut que $u_n < u_{n+1}$, puisque $n<n+1$ et que la fonction g est strictement croissante.

6) Calculons les premiers termes de la suite définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n-3}{2}\,, n \geqslant 1 \end{cases}$:

$u_1 = 1$

$u_2 = \dfrac{u_1-3}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$

$u_3 = \dfrac{u_2-3}{2} = \dfrac{-1-3}{2} = -2$

$u_4 = \dfrac{u_3 - 3}{2} = \dfrac{-2 - 3}{2} = -\dfrac{5}{2} = -2{,}5$

$u_5 = \dfrac{u_4 - 3}{2} = \dfrac{-\frac{5}{2} - 3}{2} = -\dfrac{11}{4} = -2\ .75$

On remarque que $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5$, de sorte que cette suite semble strictement décroissante.

Prouvons que cette suite est bien strictement décroissante en montrant, par récurrence, que $u_n > u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : les calculs précédents montrent clairement l'initialisation.

Hérédité : supposons que $u_n > u_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

L'hypothèse de récurrence implique :

$u_n > \dfrac{u_n - 3}{2}$

$2\,u_n > u_n - 3$

$u_n > -3$

$u_n + 3 > 0$

Montrer que $u_{n+1} > u_{n+2}$ revient à prouver que $u_{n+1} - u_{n+2} > 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_{n+2} &= u_{n+1} - \frac{u_{n+1} - 3}{2} = \frac{2\,u_{n+1} - (u_{n+1} - 3)}{2} = \frac{u_{n+1} + 3}{2} \\ &= \frac{\frac{u_n - 3}{2} + 3}{2} = \frac{\frac{(u_n - 3) + 6}{2}}{2} = \frac{u_n + 3}{4} > 0 \end{aligned}$$

vu que l'hypothèse de récurrence équivaut à $u_n + 3 > 0$.