**2.9** 1) Montrons que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2\,(n+1)-7}{3\,(n+1)+2} - \frac{2\,n-7}{3\,n+2} = \frac{2\,n-5}{3\,n+5} - \frac{2\,n-7}{3\,n+2}$$
$$= \frac{(2\,n-5)\,(3\,n+2)-(2\,n-7)\,(3\,n+5)}{(3\,n+5)\,(3\,n+2)}$$
$$= \frac{(6\,n^2-11\,n-10)-(6\,n^2-11\,n-35)}{(3\,n+5)\,(3\,n+2)}$$
$$= \frac{25}{(3\,n+5)\,(3\,n+2)} \geqslant 0$$

En effet, si $n \geqslant 1$, alors on a $3\,n \geqslant 3$, d'où suivent :

(a) $3\,n+5 \geqslant 8 > 0$

(b) $3\,n+2 \geqslant 5 > 0$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien croissante.

2) Pour prouver que 1 est un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant 1$, c'est-à-dire $1 - u_n \geqslant 0$.

$$1 - u_n = 1 - \frac{2\,n-7}{3\,n+2} = \frac{(3\,n+2)-(2\,n-7)}{3\,n+2} = \frac{n+9}{3\,n+2} \geqslant 0$$

En effet, $n \geqslant 1$ implique

(a) $n+9 \geqslant 10 \geqslant 0$

(b) $3\,n \geqslant 3$ et $3\,n+2 \geqslant 5 > 0$