4.10 1) (a) Fixons un indice i où $1 \leqslant i \leqslant n$.

Vu que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des entiers deux à deux premiers entre eux, on a que $\operatorname{pgcd}(m_i, m_j) = 1$ pour tout $j \neq i$.

Il en résulte que $\operatorname{pgcd}(m_i, \mathrm{M}_i) = 1$, c'est-à-dire que les entiers m_i et M_i sont premiers entre eux.

La proposition de la première page implique que l'équation $\mathrm{M}_i\, x \equiv 1 \mod m_i$ admet une solution x_i.

En particulier, $\mathrm{M}_i\, x_i \equiv 1 \mod m_i$ implique $b_i\, \mathrm{M}_i\, x_i \equiv b_i \mod m_i$, au vu de l'exercice 4.1 1).

(b) Soit $1 \leqslant i \leqslant n$.

Comme m_i divise M_j pour tout $j \neq i$, on obtient $\mathrm{M}_j \equiv 0 \mod m_i$.

Par suite, $b_j\, \mathrm{M}_j\, x_j \equiv 0 \mod m_i$ pour tout $j \neq i$.

Il en découle que $x \equiv b_i\, \mathrm{M}_i\, x_i \equiv b_i \mod m_i$.

Attendu que x vérifie $x \equiv b_i \mod m_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, il apparaît que x constitue une solution du système de congruences.

2) Soient x et x' deux solutions du système de congruences.

Par définition, $x \equiv b_i \mod m_i$ et $x' \equiv b_i \mod m_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

Cela signifie que $x \equiv x' \equiv b_i \mod m_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

Étant donné que les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont deux à deux premiers entre eux, l'exercice 4.4 implique :

$$x \equiv x' \mod \underbrace{m_1\, m_2\, \ldots\, m_n}_{\mathrm{M}} \text{ c'est-à-dire } x \equiv x' \mod \mathrm{M}\,.$$