4.11 1) $\mathrm{M} = 11 \cdot 8 \cdot 15 = 1320$

$\mathrm{M}_1 = \frac{1320}{11} = 120$

$\mathrm{M}_2 = \frac{1320}{8} = 165$

$\mathrm{M}_3 = \frac{1320}{15} = 88$

2) (a) $120 \equiv 121 - 1 \equiv 0 - 1 \equiv -1 \mod 11$

$120\,x \equiv -x \equiv 1 \mod 11 \iff x \equiv -1 \mod 11$

(b) Appliquons l'algorithme d'Euclide pour calculer $\text{pgcd}(165, 8)$:

$$\begin{array}{rcll}
165 = 8 \cdot 20 + 5 & \Longrightarrow & 5 = 165 - 8 \cdot 20 \\
8 = 5 \cdot \ \ 1 + 3 & \Longrightarrow & 3 = 8 - 5 \cdot 1 \\
5 = 3 \cdot \ \ 1 + 2 & \Longrightarrow & 2 = 5 - 3 \cdot 1 \\
3 = 2 \cdot \ \ 1 + 1 & \Longrightarrow & 1 = 3 - 2 \cdot 1 \\
2 = 1 \cdot \ \ 2 & &
\end{array}$$

Ainsi $\text{pgcd}(165, 8) = 1$. Puisque 1 divise 1, l'équation diophantienne $165\,x + 8\,y = 1$ admet une infinité de solutions. Déterminons en une solution particulière :

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\
&= 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1 = 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\
&= 5 \cdot (-1) + (8 - 5 \cdot 1) \cdot 2 = 8 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) \\
&= 8 \cdot 2 + (165 - 8 \cdot 20) \cdot (-3) = 165 \cdot (-3) + 8 \cdot 62
\end{aligned}$$

On en tire que $1 \equiv 165 \cdot (-3) + 8 \cdot 62 \equiv 165(-3) \mod 8$.

En d'autres termes, l'équation $165\,x \equiv 1 \mod 8$ admet pour solution $x = -3$.

(c) On pourrait à nouveau appliquer l'algorithme d'Euclide pour résoudre l'équation diophantienne $88\,x + 15\,y = 1$.

Nous allons toutefois procéder autrement.

$88\,x \equiv 90\,x - 2\,x \equiv 6 \cdot 15\,x - 2\,x \equiv -2\,x \equiv 1 \mod 15$

$-14\,x \equiv 7 \mod 15$

$-(-1)\,x \equiv x \equiv 7 \mod 15$

3) La démonstration du théorème chinois des restes nous garantit que la solution du système de congruences est donnée par :

$$\begin{aligned}
x &\equiv b_1\,\mathrm{M}_1\,x_1 + b_2\,\mathrm{M}_2\,x_2 + b_3\,\mathrm{M}_3\,x_3 \\
&\equiv 3 \cdot 120 \cdot (-1) + 6 \cdot 165 \cdot (-3) + (-1) \cdot 88 \cdot 7 \\
&\equiv -3946 \\
&\equiv 14 \mod 1320
\end{aligned}$$