4.13 Le problème revient à résoudre le système de congruences $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 2 \mod 5 \\ x \equiv 3 \mod 7 \end{cases}$.

$\mathrm{M} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

$\mathrm{M}_1 = \frac{105}{3} = 35$

$\mathrm{M}_2 = \frac{105}{5} = 21$

$\mathrm{M}_3 = \frac{105}{7} = 15$

$35\,x_1 \equiv 1 \mod 3$

$-x_1 \equiv 1 \mod 3 \qquad$ car $35 \equiv 36 - 1 \equiv -1 \mod 3$

$x_1 \equiv -1 \mod 3$

$21\,x_2 \equiv 1 \mod 5$

$x_2 \equiv 1 \mod 5 \qquad$ car $21 \equiv 20 + 1 \equiv 1 \mod 5$

$15\,x_3 \equiv 1 \mod 7$

$x_3 \equiv 1 \mod 7 \qquad$ car $15 \equiv 14 + 1 \equiv 1 \mod 7$

Le théorème chinois des restes certifie que la solution du système de congruences est donnée par :

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \cdot 35 \cdot (-1) + 2 \cdot 21 \cdot 1 + 3 \cdot 15 \cdot 1 \\ &\equiv 52 \mod 105 \end{aligned}$$

En d'autres termes, $x = 52 + 105\,k$ où $k \in \mathbb{Z}$.