4.14 Si x désigne le nombre de minutes après minuit, le problème revient à résoudre le système de congruences $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 15 \\ x \equiv 8 \mod 28 \end{cases}$.

$\mathrm{M} = 15 \cdot 28 = 420$

$\mathrm{M}_1 = \frac{420}{15} = 28$

$\mathrm{M}_2 = \frac{420}{28} = 15$

$28\,x_1 \equiv 1 \mod 15$

$-2\,x_1 \equiv 1 \mod 15 \qquad \text{car } 28 \equiv 30 - 2 \equiv -2 \mod 15$

$-14\,x_1 \equiv 7 \mod 15$

$x_1 \equiv 7 \mod 15 \qquad \text{car } -14 \equiv -14 + 15 \equiv 1 \mod 15$

$15\,x_2 \equiv 1 \mod 28 \iff 15\,x_2 + 28\,y_2 = 1$

Appliquons l'algorithme d'Euclide pour calculer $\text{pgcd}(15, 28)$:

$$\begin{array}{rcl} 28 = 15 \cdot 1 + 13 & \Longrightarrow & 13 = 28 - 15 \cdot 1 \\ 15 = 13 \cdot 1 + 2 & \Longrightarrow & 2 = 15 - 13 \cdot 1 \\ 13 = 2 \cdot 6 + 1 & \Longrightarrow & 1 = 13 - 2 \cdot 6 \\ 2 = 1 \cdot 2 & & \end{array}$$

Déterminons à présent une solution particulière de l'équation diophantienne :

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 2 \cdot 6 \\ &= 13 - (15 - 13 \cdot 1) \cdot 6 = 15 \cdot (-6) + 13 \cdot 7 \\ &= 15 \cdot (-6) + (28 - 15 \cdot 1) \cdot 7 = 28 \cdot 7 + 15 \cdot (-13) \end{aligned}$$

L'équation $15\,x_2 \equiv 1 \mod 28$ admet donc la solution $x_2 \equiv -13 \mod 28$.

Vu le théorème chinois des restes, la solution du système de congruences vaut :

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \cdot 28 \cdot 7 + 8 \cdot 15 \cdot (-13) \\ &\equiv -1168 \\ &\equiv 92 \mod 420 \end{aligned}$$

Ainsi, les deux signaux coïncideront au plus tôt 92 minutes après minuit, c'est-à-dire à 1 h 32.