4.17 1) Vu que pgcd$(6,15) = 3 \neq 1$, les entiers $m_1 = 6$ et $m_2 = 15$ ne sont pas premiers entre eux.

Étant donné que le théorème chinois des restes requiert que les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ soient deux à deux premiers entre eux, il ne s'applique pas, car cette hypothèse n'est pas vérifiée.

2) (a) i. Supposons $x \equiv 1 \mod 6$.

Comme 2 divise 6, l'exercice 4.3 implique $x \equiv 1 \mod 2$.

De même, $x \equiv 1 \mod 3$, vu que 3 divise 6.

On a donc montré $x \equiv 1 \mod 6 \Longrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 3 \end{cases}$

ii. Supposons que $x \equiv 1 \mod 2$ et $x \equiv 1 \mod 3$.

Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, l'exercice 4.4 permet d'affirmer que $x \equiv 1 \mod 2 \cdot 3$, c'est-à-dire $x \equiv 1 \mod 6$.

On a ainsi prouvé $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 3 \end{cases} \Longrightarrow x \equiv 1 \mod 6$

(b) i. Supposons $x \equiv 4 \mod 15$.

Comme 3 divise 15, l'exercice 4.3 implique $x \equiv 4 \mod 3$ ou encore $x \equiv 1 \mod 3$, vu que $4 \equiv 1 \mod 3$.

Un raisonnement similaire conduit à $x \equiv 4 \mod 5$, puisque 5 divise 15.

Nous avons donc montré $x \equiv 4 \mod 15 \Longrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 4 \mod 5 \end{cases}$

ii. Supposons que $x \equiv 1 \mod 3$ et que $x \equiv 4 \mod 5$.

$x \equiv 1 \mod 3$ donne $x \equiv 4 \mod 3$, car $1 \equiv 4 \mod 3$.

L'exercice 4.4 implique $x \equiv 4 \mod 3 \cdot 5$, à savoir $x \equiv 4 \mod 15$, attendu que les entiers 3 et 5 sont premiers entre eux.

On a donc prouvé $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 4 \mod 5 \end{cases} \Longrightarrow x \equiv 4 \mod 15$

3) Les équivalences établies ci-dessus impliquent :

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 6 \\ x \equiv 4 \mod 15 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 4 \mod 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 4 \mod 5 \end{cases}$$

Puisque les entiers 2, 3 et 5 sont deux à deux premiers entre eux, on peut appliquer le théorème chinois des restes pour résoudre ce dernier système de congruences.

$\mathrm{M} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$\mathrm{M}_1 = \frac{30}{2} = 15$

$\mathrm{M}_2 = \frac{30}{3} = 10$

$\mathrm{M}_3 = \frac{30}{5} = 6$

$15\,x_1 \equiv 1 \mod 2$
$x_1 \equiv 1 \mod 2$ car $15 \equiv 14 + 1 \equiv 2 \cdot 7 + 1 \equiv 1 \mod 2$

$10\,x_2 \equiv 1 \mod 3$
$x_2 \equiv 1 \mod 3$ car $10 \equiv 9 + 1 \equiv 3 \cdot 3 + 1 \equiv 1 \mod 3$

$6\,x_3 \equiv 1 \mod 5$
$x_3 \equiv 1 \mod 5$ car $6 \equiv 5 + 1 \equiv 1 \mod 5$

La solution générale du système de congruences est par conséquent :

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \cdot 15 \cdot 1 + 1 \cdot 10 \cdot 1 + 4 \cdot 6 \cdot 1 \\ &\equiv 49 \\ &\equiv 19 \mod 30 \end{aligned}$$