4.18 L'application des exercices 4.3 et 4.4 garantit les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x \equiv 8 \mod 12 \\ x \equiv 10 \mod 14 \\ x \equiv 3 \mod 7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 8 \mod 3 \\ x \equiv 8 \mod 4 \\ x \equiv 10 \mod 2 \\ x \equiv 10 \mod 7 \\ x \equiv 3 \mod 7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 0 \mod 4 \\ x \equiv 0 \mod 2 \\ x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 3 \mod 7 \end{cases}$$

Comme 2 divise 4, $x \equiv 0 \mod 4$ implique $x \equiv 0 \mod 2$, d'après l'exercice 4.3.

C'est pourquoi $\begin{cases} x \equiv 0 \mod 4 \\ x \equiv 0 \mod 2 \end{cases} \Longleftrightarrow x \equiv 0 \mod 4\,.$

Ainsi, le système de congruences est finalement équivalent à :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 0 \mod 4 \\ x \equiv 3 \mod 7 \end{cases}$$

Attendu que les entiers 3, 4 et 7 sont deux à deux premiers entre eux, le théorème chinois des restes s'applique pour résoudre ce dernier système de congruences.

$\mathrm{M} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$

$\mathrm{M}_1 = \frac{84}{3} = 28$

$\mathrm{M}_2 = \frac{84}{4} = 21$

$\mathrm{M}_3 = \frac{84}{7} = 12$

$28\,x_1 \equiv 1 \mod 3$

$x_1 \equiv 1 \mod 3$ car $28 \equiv 27 + 1 \equiv 3 \cdot 9 + 1 \equiv 1 \mod 3$

$21\,x_2 \equiv 1 \mod 4$

$x_2 \equiv 1 \mod 4$ car $21 \equiv 20 + 1 \equiv 4 \cdot 5 + 1 \equiv 1 \mod 4$

$12\,x_3 \equiv 1 \mod 7$

$-2\,x_3 \equiv 1 \mod 7$ car $12 \equiv 12 - 14 \equiv 12 - 7 \cdot 2 \equiv -2 \mod 7$

$8\,x_3 \equiv -4 \mod 7$

$x_3 \equiv -4 \mod 7$ car $8 \equiv 7 + 1 \equiv 1 \mod 7$

On conclut que la solution générale du système de congruences vaut :

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \cdot 28 \cdot 1 + 0 \cdot 21 \cdot 1 + 3 \cdot 12 \cdot (-4) \\ &\equiv -88 \\ &\equiv 80 \mod 84 \end{aligned}$$