4.19 Si x désigne le nombre d'hommes que comporte la compagnie, le problème revient à résoudre le système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv -3 \mod 5 \\ x \equiv -1 \mod 6 \end{cases}$$

Puisque 4 et 6 ne sont pas premiers entre eux, on ne peut immédiatement appliquer le théorème chinois des restes.

En revanche, les exercices 4.3 et 4.4 donnent les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv -3 \mod 5 \\ x \equiv -1 \mod 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv -3 \mod 5 \\ x \equiv -1 \mod 2 \\ x \equiv -1 \mod 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv 2 \mod 5 \\ x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Comme 2 divise 4, d'après l'exercice 4.3, $x \equiv 3 \mod 4$ implique $x \equiv 3 \mod 2$, à savoir $x \equiv 1 \mod 2$.

C'est pourquoi $\begin{cases} x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 2 \end{cases} \iff x \equiv 3 \mod 4$.

Ainsi, le système de congruences est finalement équivalent à :

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv 2 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Puisque les entiers 4, 5 et 3 sont deux à deux premiers entre eux, le théorème chinois des restes peut être appliqué pour résoudre ce système de congruences.

$\mathrm{M} = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$

$\mathrm{M}_1 = \frac{60}{4} = 15$

$\mathrm{M}_2 = \frac{60}{5} = 12$

$\mathrm{M}_3 = \frac{60}{3} = 20$

$15\,x_1 \equiv 1 \mod 4$

$-x_1 \equiv 1 \mod 4$ car $15 \equiv 15 - 4 \cdot 4 \equiv 15 - 16 \equiv -1 \mod 4$

$x_1 \equiv -1 \mod 4$

$12\,x_2 \equiv 1 \mod 5$

$2\,x_2 \equiv 1 \mod 5$ car $12 \equiv 10 + 2 \equiv 5 \cdot 2 + 2 \equiv 2 \mod 5$

$6\,x_2 \equiv 3 \mod 5$

$x_2 \equiv 3 \mod 5$ car $6 \equiv 5 + 1 \equiv 1 \mod 5$

$20\,x_3 \equiv 1 \mod 3$

$-x_3 \equiv 1 \mod 3$ car $20 \equiv 20 - 3 \cdot 7 \equiv 20 - 21 \equiv -1 \mod 3$

$x_3 \equiv -1 \mod 3$

La solution générale du système de congruences vaut par conséquent :

$x \equiv 3 \cdot 15 \cdot (-1) + 2 \cdot 12 \cdot 3 + 2 \cdot 20 \cdot (-1)$

$$\begin{aligned} &\equiv -13 \\ &\equiv 47 \mod 60 \end{aligned}$$

En d'autres termes, on a trouvé $x = 47 + 60\,k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Sachant que la compagnie comporte entre 100 et 150 hommes, on doit encore avoir $100 \leqslant x \leqslant 150$.

1) $100 \leqslant 47 + 60\,k$ implique $k \geqslant \frac{53}{60}$, c'est-à-dire $k \geqslant 1$.

2) $47 + 60\,k \leqslant 150$ donne $k \leqslant \frac{103}{60}$, à savoir $k \leqslant 1$.

On conclut que $k = 1$ et que la compagnie comporte $47 + 60 \cdot 1 = 107$ hommes.