4.20 1) Montrons l'équivalence $5\,x \equiv 2 \mod 24 \iff x \equiv 10 \mod 24$.

(a) Supposons $5\,x \equiv 2 \mod 24$.

$25\,x \equiv 10 \mod 24$

$x \equiv 10 \mod 24$ car $25 \equiv 24 + 1 \equiv 1 \mod 24$

(b) Supposons $x \equiv 10 \mod 24$.

$5\,x \equiv 50 \mod 24$

$5\,x \equiv 2 \mod 24$ car $50 \equiv 48 + 2 \equiv 24 \cdot 2 + 2 \equiv 2 \mod 24$

2) Montrons l'équivalence $3\,x \equiv -26 \mod 88 \iff x \equiv 50 \mod 88$.

(a) Supposons $3\,x \equiv -26 \mod 88$.

$29 \cdot 3\,x \equiv 29 \cdot (-26) \mod 88$

$87\,x \equiv -754 \mod 88$

$-x \equiv -50 \mod 88$ car $\begin{cases} 87 \equiv 87 - 88 \equiv -1 \mod 88 \\ -754 \equiv -754 + 88 \cdot 8 \equiv -50 \mod 88 \end{cases}$

$x \equiv 50 \mod 88$

(b) Supposons $x \equiv 50 \mod 88$.

$3\,x \equiv 150 \mod 88$

$3\,x \equiv -26 \mod 88$ car $150 \equiv 150 - 88 \cdot 2 \equiv -26 \mod 88$

On peut désormais constater les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 5\,x \equiv 2 \mod 24 \\ 3\,x \equiv -26 \mod 88 \\ x \equiv 28 \mod 99 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 10 \mod 24 \\ x \equiv 50 \mod 88 \\ x \equiv 28 \mod 99 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 10 \mod 3 \\ x \equiv 10 \mod 8 \\ x \equiv 50 \mod 8 \\ x \equiv 50 \mod 11 \\ x \equiv 28 \mod 9 \\ x \equiv 28 \mod 11 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 2 \mod 8 \\ x \equiv 2 \mod 8 \\ x \equiv 6 \mod 11 \\ x \equiv 1 \mod 9 \\ x \equiv 6 \mod 11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 2 \mod 8 \\ x \equiv 1 \mod 9 \\ x \equiv 6 \mod 11 \end{cases}$$

Comme 3 divise 9, l'exercice 4.3 montre que la congruence $x \equiv 1 \mod 9$ implique $x \equiv 1 \mod 3$. On a par conséquent l'équivalence
$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 9 \\ x \equiv 1 \mod 3 \end{cases} \iff x \equiv 1 \mod 9$.

En définitive, le système à résoudre se ramène à $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 8 \\ x \equiv 1 \mod 9 \\ x \equiv 6 \mod 11 \end{cases}$.

Attendu que les entiers 8, 9 et 11 sont deux à deux premiers entre eux, le théorème chinois des restes peut être appliqué.

$\mathrm{M} = 8 \cdot 9 \cdot 11 = 792$

$\mathrm{M}_1 = \frac{792}{8} = 99$

$\mathrm{M}_2 = \frac{792}{9} = 88$

$\mathrm{M}_3 = \frac{792}{11} = 72$

$99\,x_1 \equiv 1 \mod 8$

$3\,x_1 \equiv 1 \mod 8 \qquad \text{car } 99 \equiv 96 + 3 \equiv 8 \cdot 12 + 3 \equiv 3 \mod 8$

$9\,x_1 \equiv 3 \mod 8$

$x_1 \equiv 3 \mod 8 \qquad \text{car } 9 \equiv 8 + 1 \equiv 1 \mod 8$

$88\,x_2 \equiv 1 \mod 9$

$7\,x_2 \equiv 1 \mod 9 \qquad \text{car } 88 \equiv 81 + 7 \equiv 9 \cdot 9 + 7 \equiv 7 \mod 9$

$28\,x_2 \equiv 4 \mod 9$

$x_2 \equiv 4 \mod 9 \qquad \text{car } 28 \equiv 27 + 1 \equiv 9 \cdot 3 + 1 \equiv 1 \mod 9$

$72\,x_3 \equiv 1 \mod 11$

$6\,x_3 \equiv 1 \mod 11 \qquad \text{car } 72 \equiv 66 + 6 \equiv 11 \cdot 6 + 6 \equiv 6 \mod 11$

$12\,x_3 \equiv 2 \mod 11$

$x_3 \equiv 2 \mod 11 \qquad \text{car } 12 \equiv 11 + 1 \equiv 1 \mod 11$

Finalement, la solution générale du système de congruences est donnée par :

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \cdot 99 \cdot 3 + 1 \cdot 88 \cdot 4 + 6 \cdot 72 \cdot 2 \\ &\equiv 1810 \\ &\equiv 226 \mod 792 \end{aligned}$$